435 : Exemples d'étude probabiliste de situations concrètes.

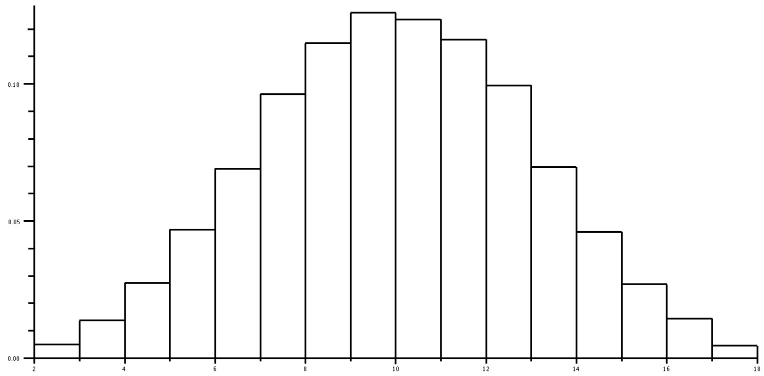
Prérequis :

* Indépendance * Loi des grands nombres * Théorème central limite * Formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$
* Théorème de convergence monotone

Exercice 1 : Le Duc de Toscane On lance 3 dés non truqués à six faces et on s'intéresse à la somme des numéros. 1) On suppose les dés indiscernables et chaque évènement équiprobables. a) Quel est l'univers et son cardinal ? On note S la somme obtenue. b) Dans ces conditions, calculer alors $\mathbb{P}(S=9)$ et $\mathbb{P}(S=10)$ 2) Mêmes questions si on suppose les dés discernables. 3) Simuler 100 000 lancers de 3 dés avec scilab et tracer l'histogramme des données pour comparer les résultats théoriques et empiriques. Que peut-on en déduire du 1) ?	Exercice très simple illustrant l'importance du choix de la modélisation
Exercice 2 : L'indicatrice d'Euler Soit $n \in \mathbb{N}$. On muni $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ de la probabilité uniforme et on note A_p l'évènement "*le nombre choisi est divisible par* p". 1) Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ quand p divise n. 2) On suppose que $p_1, \ldots, p_k$ sont des divisieurs premiers de n deux à deux distincts. Montrer que $A_{p_1}, \ldots, A_{p_k}$ sont indépendants. 3) Retrouver la formule de l'indicatrice d'Euler : $\varphi(n) = n \prod_{p \in \mathbb{P}; p\mid n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$	Retrouver un résultat arithmétique grâce aux proba. Montrer l'indépendance de deux évènements Cot. p. 9
Exercice 3 : **1) Probabilité d'une rencontre** Godot et Becket se donnent rendez-vous entre minuit et une heure du matin, et chacun promet de ne pas attendre l'autre plus de 10 min. On suppose les heures d'arrivées indépendantes, aléatoires et uniformes entre 0h00 et 01h00. Calculer la probabilité d'une rencontre. **2) L'aiguille de Buffon** On lance une aiguille de longueur a sur un parquet dont les lattes parallèles ont une largeur l (avec $a \leqslant l$). On note A l'évènement *"l'aiguille touche une rainure "*. 1) Calculer $\mathbb{P}(A)$ 2) En déduire une méthode de calcul pour approcher le nombre π 3) Faire une simulation pour tester le résultat théorique.	Cot. p. 46 pour le 1) Loi uniforme sur un pavé. La probabilité d'un évènement est l'aire de la surface représentant celui-ci sur l'air du pavé. Loi des grands nombres
Exercice 4 : Sondage lors d'un référendum On veut estimer le pourcentage p de réponses positives à un référendum. Pour cela, on effectue un sondage sur n personnes et on estime p par la fréquence relative F_n de *oui*. 1) Quel est le plus petit entier n_0 tel que la probabilité que F_n diffère de p de plus de $\alpha > 0$ soit inférieure à $\beta \in]0,1[$. 2) Application : on choisit $\alpha = 0,01$ et $\beta = 0,05$. Quand est-il de n_0 si $\alpha = 0,05$?	Loi de Bernoulli Théorème central limite Ouv. p. 233
Exercice 5 : Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ Un joueur dispose d'un capital initial $S_0 = 0$. On suppose que les parties $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont indépendantes et que X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre 0,5. Si le joueur gagne à l'étape n ($X_n = 1$), son capital augmente de 1 et sinon ($X_n = -1$) il diminue de 1. On note $\tau = \inf\{n > 0; S_n = 0\}$ et $N = card\{n \geqslant 0; S_n = 0\}$ respectivement le temps de retour à un capital nul et le nombre de passage à un capital nul. 1) Calculer l'espérance de N (nombre moyen de passage en 0). 2) Montrer que $\{\tau < +\infty\}$ et $\{N = +\infty\}$ sont presque sûr. 3) Interpréter les résultats et faire une simulation. 4) Faire une simulation dans le cas où trois joueurs X,Y et Z, dont le tour de jouer est aléatoire et uniforme sur {X,Y,Z}, jouent au même jeu de manière indépendante. Conjecturer et interpréter.	Évolution et comportement du capital d'un joueur. $S_n < 0$ si le joueur est endetté. Cot p. 280 et P.P. p. ? aussi

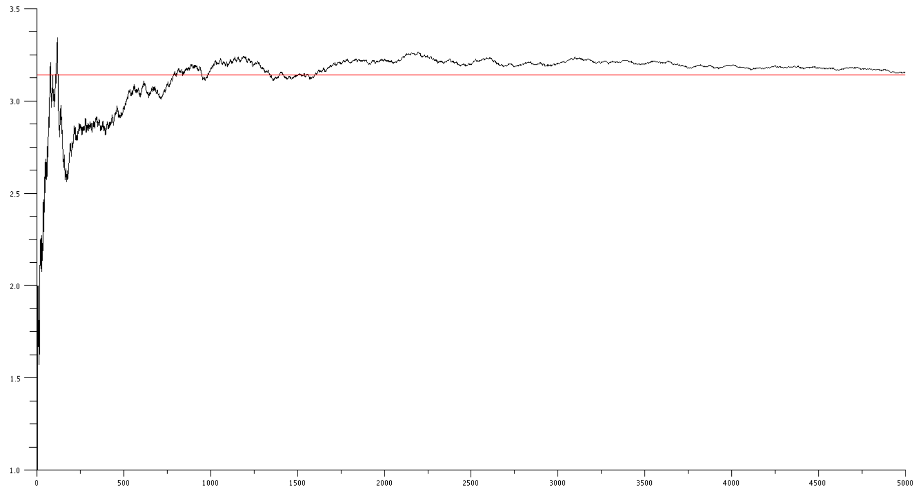
Toscane

```
clf();
nbsimul=100000;
x=floor(6*rand(nbsimul,3)+1);
histplot((2 :18),sum(x,'c'));
```

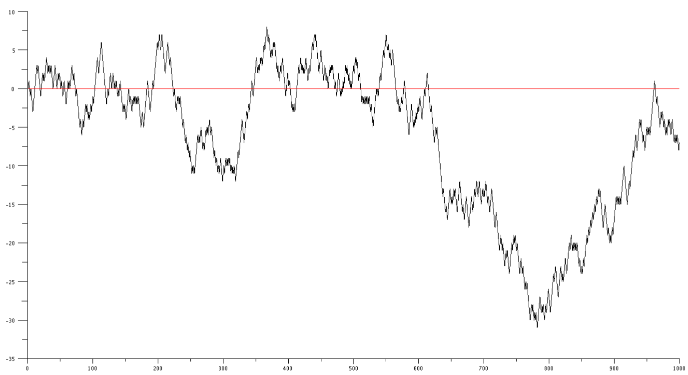


Buffon

```
nbsimul=input('Nombre de lancers d aiguilles :');
theta=%pi/2*rand(1,nbsimul); //simulation de l'angle
r=rand(1,nbsimul); //distance du milieu de l'aiguille à la rainure
fav=ones(1 :nbsimul);
for i=2 :nbsimul
        if (sin(theta(i)) < 2 * r(i)) then fav(i)=0;
        end    //on compte le nombre de cas favorable
end
clf();
plot2d((1 :nbsimul),(1 :nbsimul)./cumsum(fav));
plot2d((1 :nbsimul),%pi*ones(1 :nbsimul),style=5);
printf('%.20f',nbsimul/sum(fav));
```

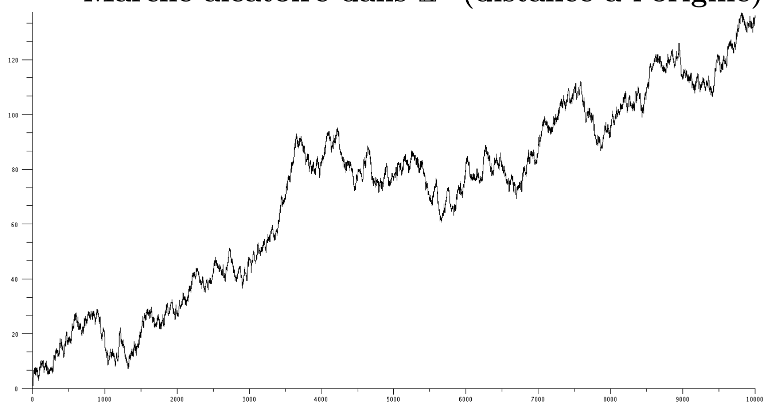


Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$



```
nbpas=input('nombre de pas :');
m=zeros(1,nbpas);
for i=2 :nbpas
    if rand()<0.5 then
        m(i)=m(i-1)-1;
    else
        m(i)=m(i-1)+1;
    end
end
clf();
plot2d((1 :nbpas),m);
plot2d((1 :nbpas),zeros(1 :nbpas),style=5);
```

Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^3$ (distance à l'origine)



```
nbpas=input('nombre de pas :');
x=zeros(1,nbpas);
y=zeros(1,nbpas);
z=zeros(1,nbpas);
dist=zeros(1,nbpas);
for i=2 :nbpas
r=rand();
  if (6*r<1) then
    x(i)=x(i-1)+1; y(i)=y(i-1); z(i)=z(i-1);
  end
  if (6*r>=1)&(6*r<2) then
    x(i)=x(i-1)-1; y(i)=y(i-1); z(i)=z(i-1);
  end
  f (6*r>=2)&(6*r<3) then
```

→

```
    y(i)=y(i-1)+1; x(i)=x(i-1); z(i)=z(i-1);
  end   if (6*r>=3)&(6*r<4) then
    y(i)=y(i-1)-1; x(i)=x(i-1); z(i)=z(i-1);
  end
  if (6*r>=4)&(6*r<5) then
    z(i)=z(i-1)+1; x(i)=x(i-1); y(i)=y(i-1);
  end
  if (6*r>=5) then
    z(i)=z(i-1)-1; x(i)=x(i-1); y(i)=y(i-1);
  end
  dist(i)=sqrt(x(i)^2+y(i)^2+z(i)^2);
end
clf();
plot2d((1 :nbpas),dist);
```


$\boxed{\text{Cot.}}$: M. Cotrell, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre, *Exercices de probab., licence master écoles d'ingé.* Cassini

$\boxed{\text{Ouv.}}$: J.-Y. Ouvrard, *Probabilités 1, licence capes*, Cassini

$\boxed{\text{P.P.}}$: presque partout

José Gregorio : http://agregorio.net