412 : Exemples de développements en série entière. Applications.

Prérequis :

* Séries entières, rayon de convergence, produits, dérivation, intégration de séries entières.

* Déterminant. Formule de Taylor avec reste intégral. Théorème de convergence dominée.

Exercice 1 : Dénombrements

Soit D_n le nombre de dérangement d'un ensemble à n éléments.

1) Calculer $\sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$

2) Calculer $D(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D_k z^k}{k!}$, pour $|z| < 1$ et en déduire D_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Série génératrice expo.
Produit de Cauchy

XENS Alg. T1 p. 9

Exercice 2 : Déterminant

Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & \dots & a_1 & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

avec $a_0 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $\dots, a_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$

Déterminant par blocs
D.S.E. de $(1+x)^\alpha$
Produit de Cauchy

XENS Alg. T2 p. 12

Exercice 3 : Résoudre une équation différentielle

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (ξ) : $xy'' + 2y' + xy = 0$

Solution D.S.E.
Méthode de Lagrange (pour les équadiff.)

Soro. Ana. p. 107

Exercice 4 : Développement en série entière d'une fonction

1) Développer en série entière la fonction définie sur $]-1,1[$ par $x \mapsto (\arcsin x)^2$.
En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 C_{2n}^n}$

2) Montrer que $g(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}\right)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

D.S.E. usuel
Produit de Cauchy
Équation différentielle
Dérivation, intégration
Calcul de somme exacte

XENS Ana. T2 p. 201

Exercice 5 : Calcul d'une intégrale

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(zt)dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{z^2}{2}}$

D.S.E.
Th. cv. dominée
Changement de variable

Soro. Ana. p. 81

Exercice 6 : Un théorème de Bernstein

Soit $a > 0$, $I =]-a, a[$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ telle que $(\forall k \in \mathbb{N})$, $f^{(2k)} \geqslant 0$ sur I.
Montrer que f est développable en série entière sur I.
Application à la fonction $x \mapsto \tan(x)$ définie sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

D.S.E.
Th. cv. dominée
Changement de variable

Soro. Ana. p. 103
aussi dans Gourdon, Rombaldi, ...

José Gregorio : http://agregorio.net

D'autres exercices :

1. Calculer $p(d)$, le nombre de triplets solutions dans $\mathbb{N}^3$ de l'équation $x + 2y + 3z = d,\ d \geqslant 0$ $\boxed{\text{Soro. Ana. p. 109}}$

2. Nombres de Bell (Oraux-XENS Alg. T1)

3. Nombres de Catalan (Oraux-XENS Alg. T1)

José Gregorio : http://agregorio.net