410 : Comparaison, sur des exemples, de divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions.

Prérequis :
* T.V.I., T.S.S.A., théorème de comparaison des séries à termes positifs.
* Le théorème de Heine
* Pour I segment et $p \geqslant 1$, $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathcal{C}(I)$.
* Les définitions de convergences : simple, absolue, uniforme, normale et leurs implications.

Exercice 1 : Fonctions zêta et thêta
Déterminer les domaines de convergences simples, abolues, uniformes et normales de :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \qquad \text{et} \qquad \theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Exemples très simples
Permet de bien cerner les notions
Contre-exemples pour les réciproques

Exercice 2 : Cas particuliers de réciproques
Montrer que la convergence est uniforme dans les cas suivants :
1. (f_n) une suite croissante de fonctions réelles continues sur $[a;b]$ qui converge simplement vers f continue.
Application à la suite définie sur $[-1;1]$: $P_0(t) = 0$, $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{t^2 - P_n^2(t)}{2}$
2. (f_n) une suite de fonctions c-lipschitziennes sur $[a;b]$ converge simplement vers f.
3. Si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur $[a;b]$ qui converge simplement vers f alors la convergence est uniforme sur tout segment de $]a;b[$.
Application : $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge uniformément vers e^x sur $[a;b]$

Quelques cas particuliers où l'on a la réciproque de
$CU \Rightarrow CS$ (Dini)
Rmq : on peut faire la 2eme appli aussi avec 1)
XENS T2 p.155 à 165

Exercice 3 :
Montrer que la série suivante converge simplement mais pas normalement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

$$\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \underbrace{\sin(\sin(\dots\sin(x)\dots))}_{n\,fois}$$

T.S.S.A., T.V.I.
Recherche d'équivalent
Cauchy uniforme
XENS T2 p.100

Exercice 4 : Convergence simple et uniforme
On considère $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, affine par morceaux, définie par $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ et $f_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_- \cup [\frac{2}{n}, +\infty[$. Soit $m \mapsto r_m$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur $\mathbb{Q}$. Étudier la convergence simple et uniforme de :

$$g_n(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{f_n(t - r_m)}{2^m}$$

Suite de fonctions définies comme somme de séries de fonctions

Converge simplement mais ne converge uniformément sur aucun ouvert
XENS T2 p. 109

Exercice 5 : Convergence simple et en norme $\|.\|_p$
Soient f et (f_n) des fonctions continues sur $I = [a;b]$, un segment.

1. Montrer que si $1 \leqslant p < q$ et $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_q} f$ alors $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$. Que dire si I n'est pas borné ?
2. On pose $f_n(x) = n^2 x^n (1 - x)$ sur $[0\,;1]$. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle mais ne converge pas vers la fonction nulle pour la norme $\|.\|_1$
3. Existe-t-il une sous-suite de (f_n) qui converge dans $\mathcal{C}([0;1])$ pour la norme $\|.\|_1$?

Relation de convergence pour les normes $\|.\|_p$ sur $\mathcal{C}([0;1])$
Inégalité de Hölder
Importance de la domination dans le Th. de CV dominé
Meu. T3 p. 311

Exercice théorique (n'ayant pas trop sa place dans la leçon) : Théorème de Fejér

(Rappel : Si f est continue 2π-périodique alors sa série de Fourier ne converge pas toujours.)

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ continue 2π-périodique. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note (c_k) la suite des coefficients de Fourier de f, $e_k(.) = e^{ik.}$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \qquad C_n = \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_n}{n+1}$$

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k \qquad \tilde{C}_n = \frac{\tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 + \cdots + \tilde{S}_n}{n+1}$$

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t)dt = 1$ et $(\forall \alpha \in]0;\pi[) \quad (\tilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $A_\alpha := [-\pi;\pi]\backslash[-\alpha;\alpha]$
2. En déduire que (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Amélioration du théorème de Dirichlet

Convergence uniforme en moyenne de Césaro

Une fonction continue périodique est U.C. sur $\mathbb{R}$ et est limite uniforme de polynômes trigo.

Gd p. 282