402 : Exemples d'étude de suites ou de séries divergentes.

Prérequis :

* Critère de Cauchy pour les séries convergentes. * Comparaison série intégrale * Taylor
* T.A.F. * Inégalité de Cauchy-Schwarz * Equivalence des restes de séries convergentes à termes positifs.
* Formule de Stirling : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ et donc en particulier $\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + O(1)$

Exercice 1 :

On pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $\quad u_n = H_n - \ln(n)$ et $\quad v_n = u_n - \frac{1}{n}$

1) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

2) Donner un développement asymptotique avec 4 termes de H_n.

C'est presque du cours
Comparaison $\sum$ et $\int$
Comparaison des restes
X-ENS p. 145

Exercice 2 :

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ est divergente.

2) Trouver la meilleure minoration possible de la somme partielle.

3) La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sigma(n)}{n^2\ln(n)}$ est-elle divergente ?

Critère de Cauchy
Inégalité de C.S
$\sum$ par paquets
X-ENS p. 139

Exercice 3 :

Soit $\alpha \notin \mathbb{Q}$ avec $\alpha > 0$.

1) Montrer que pour tout entier $N \in \mathbb{N}^*$, $\quad \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad 1 \leqslant q \leqslant N, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qN}$

2) En déduire la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2 \sin^2 n}$.

3) Montrer que l'ensemble des valeurs d'ahdérences la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 0}$ est $[-1;1]$.

Principe des "tiroirs"
Terme de la série
ne tend pas vers 0.
Suite divergente
sans limite.
Gd p. 272

Exercice 4 :

On note $(p_n)_{n\geqslant 0}$ la suite croissante des nombres premiers positifs.

1) Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{p_n}$ est divergente.

2) En notant $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n, montrer que $\pi(n) = o(n)$.

Décomposition en
facteurs premiers.
Indicatrice d'Euler φ
X-ENS p.153

Exercice 5 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs positifs de n.
Pour $x \in [1;+\infty[$, on pose $F(x) = \sum_{1\leqslant x\leqslant n} \tau_n$.

1) Trouver un équivalent simple de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

2) Démontrer que lorsque x tend vers $+\infty$, $\quad F(x) = x\ln(x) + (2\gamma - 1)x + O\left(\sqrt{x}\right)$.

Partie entière.
D.A. de la somme
de Riemann.
X-ENS p. 160

Exercice 6 :

Donner un équivalent de $u_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} k^k}$ quand n tend vers l'infini.

T.A.F.
D.A. de $\ln(n!)$
à partir de Stirling
X-ENS p. 150

Exercice 7 :

On note $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$.

1) Montrer que P_n admet au plus une racine réelle.

2) Soit a_n l'unique zéro réel de P_{2n+1}.
Déterminer la limite puis un équivalent de a_n.

Homéomorphismes
Taylor Lagrange
D.A. de $\ln(n!)$
à partir de Stirling
X-ENS p. 120