347 : Exercices faisant intervenir la trigonométrie.

Prérequis :

* Identité d'Euler ; Formule de Moivre ; Séries de Fourier ;
* Signature et rang d'une forme quadratique ; Longueur d'une courbe paramétrée.

Exercice 1 : Rang d'une forme quadratique

Déterminer le rang de la forme quadratique ϕ définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par la matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante : $A = (ch(a_i - a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Trigonométrie des fonctions hyperbolique. Décomposition en formes linéaires indépendantes. Signature et rang d'une forme quadratique.

Exercice 2 : Longueur de la cardioïde

On se donne une cardioïde d'équation polaire $\rho(\theta) = a(1+\cos(\theta))$ avec $a > 0$. Calculer sa longueur en fonction de a.

Calcul intégral avec changement de variable et utilisation de formules trigonométriques.

Exercice 3 : Un calcul de $\zeta(2)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,
$$P_n\left(\text{cotan}^2 t\right) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t}$$
2. Expliciter les racines de P_n et calculer leur somme.
3. En observant que l'on a $\text{cotan}^2 t \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2 t$ pour tout $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, déterminer la valeur de $\zeta(2) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Formules de Moivre, binôme de Newton, relation coefficients - racines d'un polynôme, encadrement série à termes positifs.

Exercice 4 : Théorème de Fejér

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue et 2-π périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad x \mapsto e^{ikx}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions $S_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k$, $C_n = \frac{S_0+S_1+\dots+S_n}{n+1}$, $\tilde{S}_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} e_k$ et $\tilde{C}_n = \frac{\tilde{S}_0+\dots+\tilde{S}_n}{n+1}$. (Les $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de f)

1. Vérifier que $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t)dt = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \pi[$ la suite de fonction $(\tilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi, \pi] \backslash [-\alpha, \alpha$.
3. En déduire le théorème de Fejér : la suite de fonctions (C_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Somme partielle de séries géométriques, formules trigonométriques, convergence uniforme et fonctions périodiques. On a la convergence uniforme en moyenne de Césaro de la série de Fourier de f vers f en supposant seulement f continue et 2-π périodique.

José Gregorio : http://agregorio.net

Commentaires : J'ai présenté cette leçon le jour de mon oral d'agrégation, voici ce qu'il en est ressorti :

Exercice 1 : Rien de particulier mais mieux vaut connaître les différentes définitions équivalentes du rang d'une forme quadratique (la question ne m'a pas été posée).

Exercice 2 : Je voulais un exercice un peu plus géométrique que les autres. Après mon développement (ex 3) le jury m'a demandé de développer aussi cet exercice. Puis quelques questions supplémentaires : pouvez-vous tracer une représentation de cette cardioïde à partir de l'équation polaire, en passant par le repère de Frenet ? cela peut très vite devenir un cauchemar si l'on a pas eu le temps de revoir ces notions là...

Exercice 3 : Tout est déjà dit dans les commentaires, il faut bien connaître ses formules de relations entre coefficients et racines d'un polynôme, connaître par cœur chaque étape de la démonstration pour éviter de s'emmêler les pinceaux. Pas de questions méchantes de la part du jury, je m'attendais à quelque chose comme : connaissez-vous une autre démonstration de l'égalité $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, Fourier,...

Exercice 4 : Le jury m'a aussi demandé de développer le théorème de Fejér. C'est plutôt joli mais aussi assez long. Ne pas l'écrire sur sa feuille donc, si on ne maitrise pas chaque étape de la démonstration, d'autant que de nombreuses subtilités n'apparaissent pas forcément à la première lecture. Autres questions posées par le jury : toutes celles auxquelles on peut s'attendre, conditions de convergence simple et uniforme des séries de Fourier, donc théorème de Dirichlet.

Autre pistes :

On peut selon ses affinités ajouter ou remplacer plusieurs exercices par d'autres, souvent géométriques. Rayon de courbure et centre du cercle osculateur de l'ellipse par exemple. En fait dès qu'il y a des fonctions trigonométriques et/ou exponentielles on est dans la leçon, les possibilités sont donc immenses.

Bibliographie :

Exercice 1 : "Système D - Algèbre et géométrie" d'Éric Sorosina (EdiScience)

Exercice 2 : "Géométrie MPSI : Cours, méthodes et exercices corrigés" de Jean-Marie Monier (Dunod)

Exercice 3 : "Oraux X-ENS, algèbre 1" de S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas (CASSINI)

Exercice 4 : "Les maths en tête Analyse" de Xavier Gourdon (Ellipses)