253 : Algorithmes d'approximation des solutions d'une équation différentielle.

Prérequis : Th. Cauchy-Lipschitz, $\sum$ de Riemann formules de Taylor. Pour ne pas alourdir les notations, on se limitera à des pas constants.

I- Principe des méthodes

1) Problématique

On pose le problème de Cauchy suivant :

$$(E)\begin{cases} y' = f(t,y) & \text{sur } [a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ une subdivision régulière de $[a,b]$, de pas $h = \frac{b-a}{n}$, donc $t_i = a + ih$

On recherche une approximation $(y_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $(z(t_i))_{0\leqslant i\leqslant n}$ où z est une solution de (E).

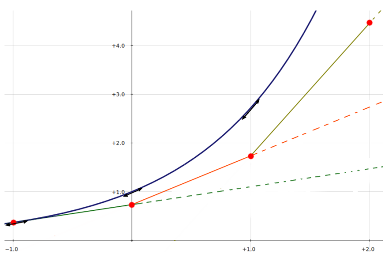
2) Schéma général (Taylor-Lagrange ordre1 TAF)

$$\frac{z(t_{i+1})-z(t_i)}{h} = z'(c_i) = f(c_i, z(c_i)) \approx \Phi(t_i, z(t_i), h)$$

Le calcul de y_{i+1} se fait à partir de t_i, y_i, h sous la forme $y_{i+1} = y_i + h\Phi(t_i, y_i, h)$. Choisir une méthode c'est choisir la fonction Φ.

3) Méthode d'Euler

On choisit $\Phi(t,y,h) = f(t,y)$, on confond la courbe et sa tangente.



Exemple :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

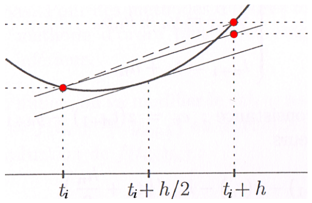
La méthode d'Euler donne :

$y_i = (1+h)^i$

4) Méthode du point milieu

On choisit $\Phi(t,y,h) = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}f(t,y)\right)$.

L'idée est que la corde d'une solution z entre t_i et t_{i+1} a une pente voisine de $z'\left(t_i + \frac{h}{2}\right)$



Dans la suite z désignera une solution de (E) et Φ sera supposée au moins continue

II- Convergence et ordre

Déf : On dira qu'une méthode est convergente si :
$\lim\limits_{h\to 0} \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |y_i - z(t_i)| = 0$, pour toute solution y de (E)

Déf : Pour tout $1 \leqslant i < n$, on définit les erreurs de consistances $e_i = z(t_{i+1}) - z(t_i) - h\Phi(t_i, z(t_i), h)$.

La méthode est consistante si : $\left(\sum\limits_{0\leqslant i<n} |e_i|\right) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

Déf : On pose $\tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h\Phi(t_i, \tilde{y}_i, h) + \varepsilon_i$.

La méthode est stable s'il existe $S \geqslant 0$ tel que :

$$\max_{0\leqslant i\leqslant n} |\tilde{y}_i - y_i| \leqslant S\left(|\tilde{y}_0 - y_0| + \sum_{0\leqslant i<n} |\varepsilon_i|\right)$$

Coro : Si la méthode est stable et consistante alors elle est convergente.

Th : $\Phi(t,y,0) = f(t,y) \Leftrightarrow$ Méthode consistante

Φ lipschitzienne en $y \Rightarrow$ Méthode stable.

Expl : Si f est lipschitzienne en y alors les méthodes d'Euler et du point milieu sont convergentes.

Déf : Lorsque f est $\mathcal{C}^p$, on dit que la méthode est d'ordre au moins p si : $(\exists C \geqslant 0)$ t.q. $|e_i| \leqslant Ch^{p+1}$, $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$

Prop : La méthode d'Euler est d'ordre 1 et la méthode du point milieu est d'ordre 2.

III- Exemples et applications

1) Méthodes de Runge-Kutta d'ordre 2

On cherche une méthode d'ordre 2 :

$y(t_{i+1}) = y(t_i) + a_1 h f(t_i, y(t_i)) + a_2 h f(t_i + a_3 h, y(t_i) + a_4 h)$

Th : Un D.L. de Taylor-Lagrange d'ordre 2 de f montre que la méthode est d'ordre 2 ssi :

$a_1 + a_2 = 1;\ a_2 a_3 = \frac{1}{2};\ a_2 a_4 = \frac{f(t_i, y(t_i))}{2}$

Prop : Si $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = \frac{1}{2}$ et $a_4 = \frac{f(t_i, y(t_i))}{2}$ on retrouve la méthode du point milieu. Pour $a_1 = a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = 1$ et $a_4 = f(t_i, y(t_i))$ on a une méthode appelée méthode de Heun.

2) Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\Phi(t,y,h) = \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \qquad \text{où}$$

$$k_1 = f(t,y); \quad k_2 = f\left(t + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \tfrac{h}{2}, y + \tfrac{h}{2}k_2\right); \quad k_4 = f(t+h, y+hk_3)$$

3) Applications

Problème du pendule :

$\theta''(t) = -\frac{c\theta'(t)}{m} - \frac{g\sin(\theta'(t))}{l}$

Tension aux bornes d'un condensateur :

$RCu'(t) + u(t) = E$.

I- partout

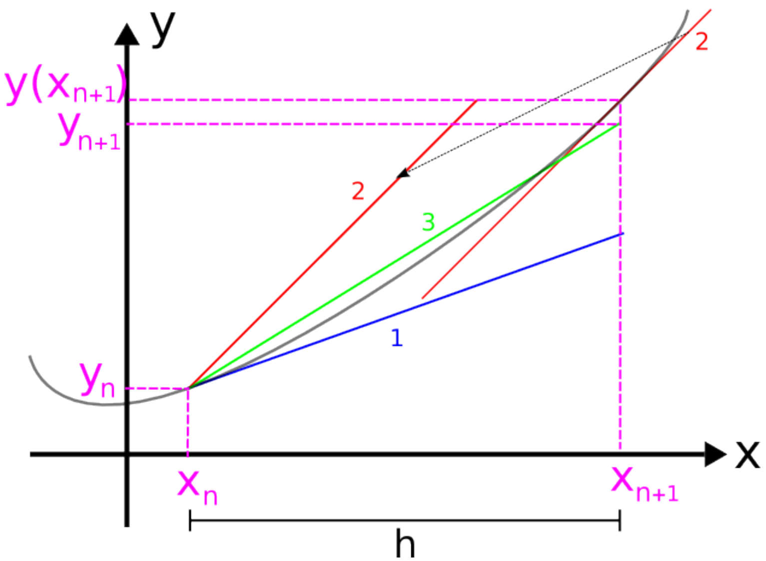
II- J-P. Demailly : "Analyse numérique et équadiff."

III- A. Fortin : "Analyse numérique pour ingénieurs"

José Gregorio : http://agregorio.net

Commentaire :
Ne pas se lancer dans la démonstration de Runge-Kutta d'ordre 4, elle n'est en général pas faite dans les livres car horrible : on pousse le DL de Taylor de la fonction f jusqu'à l'ordre 5 (sachant que c'est une fonction de 2 variables dont la seconde est composée), on aboutit non sans mal à 8 équations non linéaires à 10 inconnues...

Interprétation géométrique de la méthode de Heun (méthode d'Euler modifiée) :



Crédit : Benoit Carry
http://media4.obspm.fr/public/m2r/cours/chapitre3/souschapitre2/section4/page4/section3_2_4_4.html

Bibliographie :

1. Jean-Pierre Demailly "Analyse numérique et équations différentielles" EDP Sciences. (p. 203 à 224)

2. R. Théodor "Initiation à l'analyse numérique" CNAM cours A, Masson.

3. André Fortin "Analyse numérique pour ingénieurs" Presses internationales Polytechnique.

José Gregorio : http://agregorio.net