228 : Recherche d'extremums pour une fonction d'une ou plusieurs variables réelles.

Prérequis : extremums locaux et globaux ; formes quadratiques ; compacts ; convexité ; orthogonalisation de Schmidt ; Taylor ; U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

I- Fonctions continues

Th : Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ alors f est bornée et atteint ses bornes.

Exos :
1) Quels sont les triangles inscrits dans une ellipse qui ont une aire maximale ? XENS Alg.T3 p. 271
2) Trouver le maximum sur K de la forme quadra. $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i \neq j} x_i x_j$ où $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n | \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

XENS Alg. T3 p. 238

Coro : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors f admet un minimum.

Applications :
1) La distance d'un point à un fermé est atteinte.
2) Th. fondamental de l'algèbre
3) Polynôme dans $\mathbb{R}_n[X]$ de meilleure approximation de $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ pour $\|.\|_\infty$

Th : Soit E espace euclidien, $u \in E$ et F un *s.e.v.* de E alors $x \mapsto \|x - u\|$ admet un minimum global strict sur F qui vaut $\|p_F(u) - u\|$

Exp : le minimum de $F(x, y) = \displaystyle\int_0^1 (\ln(t) - x - yt)^2 dt$ sur $\mathbb{R}^2$ est 1/4. Soro. Alg. p. 317

II- Fonctions différentiables

Th : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Si f admet un extremum local en $a \in U$ alors $df_a = 0$. On dit que a est un point critique de f. (La réciproque est fausse $x \mapsto x^3$)

Exo : Soit $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|a\| < 1$. Montrer que $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^{1/2} - < a, x >$, admet un unique minimum local qui est global.

Coro : Si U est borné, f est continue sur $\bar{U}$ et différentiable sur U avec $df_a \neq 0$ pour tout $a \in U$ alors $(\forall y \in U)\ \min_{x \in \partial U} f(x) < f(y) < \max_{x \in \partial U} f(x)$

Exo : Trouver le minimum de $f(x, y) = \dfrac{xy(x + y)}{xy - 1}$ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0, y > 0, xy > 1\}$

Prop : Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in \overset{o}{I}$. Si f' s'annule en changeant de signe en a alors f admet un extremum local en a.

Exp : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que P' admet exactement k racines réelles de multiplicité impair, alors P admet exactement k extremums locaux.

Coro :
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable en a telle que $f'(a) = 0$ alors f admet un minimum global en a.

XENS Ana. T1 p. 287

III- Conditions d'ordre 2

Th : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$
- Si f admet un minimum local en $a \in U$ alors $df_a = 0$ et $d^2 f_a$ est une f.q. positive (CN)
- Si $df_a = 0$ et $d^2 f_a$ est une f.q. définie positive alors f admet un minimum local strict en a (CS)

Appli : Droite des moindres carrés

Rouv. p. 384

Coro Dans le cas où $a \in U \subset \mathbb{R}^2$ est un point critique et $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$
(i) $rt - s^2 > 0$ et $r > 0 \Rightarrow$ min. local strict en a
(ii) $rt - s^2 > 0$ et $r < 0 \Rightarrow$ max. local strict en a
(iii) $rt - s^2 < 0 \Rightarrow$ pas d'extremum en a

Exp : $f(x, y) = x^3 + \frac{4}{3} y^3 + 3y^2 - 3x + 1$ extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$ Soro. Ana. p. 381

Th : (Principe du maximum)
Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$, $(b_i) \in \mathbb{R}^n$ et $A = (a_{i,j}) \in (S_n^+(\mathbb{R}))^*$. On considère l'opérateur différentiel : $L = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$

Si u est $\mathcal{C}^2$ sur Ω et $\mathcal{C}^0$ sur $\bar{\Omega}$ telle que $Lu \geqslant 0$ sur Ω alors le maximum de u sur $\bar{\Omega}$ est atteint sur le bord $\partial\Omega$. Rouv. p. 393.

José Gregorio : http://agregorio.net