218 : Différentes formules de Taylor pour une fonction d'une variable réelle. Applications.

Prérequis : Th. Rolle ; I.A.F. (généralisée)
Notation : I un interv de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

I- Formules de Taylor-Lagrange

Th : (Taylor Lagrange)
Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b],\mathbb{R})$, *(n+1)*-fois dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Rmq 1 : Si $a=0$ et $b=x$: Taylor Mc Laurin.

Rmq 2 : Pour $n=0$ on retrouve le T.A.F.

Exo : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $|f^{(n)}(x)| \leqslant |P(x)| \quad (\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})$
Que dire de f ? $\boxed{\text{XENS Ana. T1 p. 266}}$

Exo : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$ avec $f(0) > 0$ et $f'(0) > 0$. On suppose que $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Mq il existe une suite strict. croissante $(x_n)_{n\geqslant 1}$ t.q. $f^{(n)}(x_n) = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\boxed{\text{XENS Ana. T1 p. 269}}$

Th : (Inégalité de Taylor-Lagrange)
Soit $f : [a,b] \to E$, e.v.n., $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$ et *(n+1)*-fois dérivable sur $]a,b[$ telle que $\|f^{(n+1)}\| \leqslant M$ sur $]a,b[$.

$$\|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\| \leqslant \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Appli : Inégalités classiques
$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad |\sin(x) - x| \leqslant \frac{|x^3|}{3!}$
$(\forall x \in \mathbb{R}) \qquad |\cos(x) - 1| \leqslant \frac{x^2}{2}$

Appli : D.S.E. de $x \mapsto e^x$

Th : (Taylor avec reste intégral)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$$

Exo : Déterminer le minimum de $\displaystyle\int_0^1 (f''(t))^2 dt$ sur $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) ; f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) = a\}$ où a est un réel donné $\boxed{\text{XENS Ana. T2 p. 27}}$

II- Formule de Taylor-Young

Th : (Taylor-Young)
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable à l'ordre n en $a \in \mathring{I}$ alors, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$.
Rmq : On obtient ainsi des développements limités.

Appli : Calcul de limite : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{\tan(x) - x}$

Appli : Étude locale en 0 de la courbe

$$\begin{cases} x(t) = t^4 + 4t^3 + 6t^2 \\ y(t) = \quad 2t^3 + 3t^2 \end{cases}$$ $\boxed{\text{Soro. p. 394}}$

Appli : Recherche d'équivalents et nature de séries.
Exemple :
Soit $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \underbrace{\sin(\sin(\ldots\sin(x)\ldots))}_{n\ fois}$ diverge.

III- D'autres applications

1) Extremum
Si $f : I =]a,b[\to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^n$, $n \geqslant 2$ et $c \in I$ tel que $f^{(k)}(c) = 0$, $\forall k \in [|1, n-1|]$ et $f^{(n)}(c) \neq 0$ alors f admet un max. (resp. min.) loc. ssi n est pair et $f^{(n)}(c) < 0$ (resp. $f^{(n)}(c) > 0$) $\boxed{\text{Romb. p. 187}}$

2) DSE (Th. de Bernstein) $\boxed{\text{Romb. p. 196}}$
Si $f : I =]-a,a[\to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $f^{(2k)}(x) \geqslant 0$ $(\forall k \in \mathbb{N})$ sur I alors f est D.S.E.

3) Inégalités de Kolmogorov $\boxed{\text{XENS Ana. T1 p.275}}$

Soit $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{C})$. On pose $M_k = \|f^{(k)}\|_\infty$. Si M_0 et M_n sont finies alors M_k est finies pour tout k et :

$$M_k \leqslant 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}$$

4) Majoration d'erreur (méthode des rectangles)
Si $f \in \mathcal{C}^3([0,1],\mathbb{R})$ alors on a : $\boxed{\text{Romb. p. 194}}$

$$\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n}(f(1) - f(0)) - \frac{1}{12n^2}(f'(1) - f'(0)) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

5) Th. Glaeser $\boxed{\text{XENS Ana. T1 p. 270}}$
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^+)$. $\sqrt{f}$ est $\mathcal{C}^1$ ssi en tout zéros x_0 de f on a $f''(x_0) = 0$.

José Gregorio : http://agregorio.net