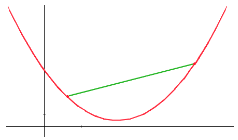
217 : Fonctions convexes d'une variable réelle. Applications.

Prérequis : Partie convexe de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$
Notation : I un interv de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

I- Définitions et exemples

Déf : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (cvx) sur I si pour tout $(x,y) \in I^2$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$. On dira que f est concave (ccv) si $-f$ est convexe (si l'inégalité est stricte avec $\lambda \in]0,1[$: stricte convexité).



f est convexe si son graphe est sous ses cordes.
exemple : Les fonctions affines et $f(x) = x^2$ sont convexes.

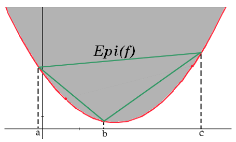
Exercice : Soit f continue telle que $\forall (x,y) \in I^2$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Montrer que f est convexe.

Propriétés : (opérations sur les fonctions convexes)
1) Si $a, b > 0$ et f, g sont cvx alors $af + bg$ est cvx.
2) Si f, g sont cvx et g croissante alors $g \circ f$ est cvx.
3) Si f est bijective, croissante et cvx alors f^{-1} ccv.

Application : exp est cvx et ln est ccv.

Définition :

L'épigraphe de f est :
$Epi(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x) \leqslant y\}$



Propriétés : On a équivalence entre :
1) f est cvx. **2)** $Epi(f)$ est une partie cvx de $\mathbb{R}^2$.
3) $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$, tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$, on a : $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$
4) Soit $a \in I$, $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \backslash \{a\}$.
5) Si $a < b < c$ alors $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$

Ex : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cvx et majorée. Montrer que f est constante.
Ex : Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ cvx. Montrer que $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite l dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ qd $x \to +\infty$ et si $l < +\infty$ alors $f(x) - lx$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ qd $x \to +\infty$.

II- Propriétés

Prop : Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions convexes sur un segment $[a,b]$ qui converge simplement vers une fonction f alors la convergence est uniforme sur tout segment de $]a,b[$.

Appli. : $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ converge uniformément vers $x \mapsto e^x$ sur tout segment $[a,b]$.

Prop : Si f est cvx sur I alors f admet des dérivées à gauche et à droite croissantes sur $\mathring{I}$, f est continue sur $\mathring{I}$ et tout minimum local est global.

Coro : Si f est dérivable alors f cvx $\Leftrightarrow$ $f' \nearrow$.

Prop : Si f est cvx et dérivable alors le graphe de f est au dessus de ses tangentes.

Appli : Si f est cvx et dérivable sur $[a,b]$ alors $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}$.

Prop : Si f est 2fois dérivable alors f cvx $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$

Appli : 1) $y''(t) + q(t)y(t) = 0$, $q < 0$ et C^0 sur $\mathbb{R}$. L'unique solution bornée sur $\mathbb{R}$ est $y = 0$. Une solution non nulle s'annule au plus une fois.

Def : $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ est log-cvx si $\ln \circ f$ est cvx.
Exemple : La fonction ζ est log-cvx.
Prop : f log-cvx$\Rightarrow$ f cvx.

Prop : f log-cvx ssi $(\forall c > 0)$ $x \mapsto f(x)c^x$ cvx.

Coro : $a, b > 0$ et f, g log-cvx $\Rightarrow af + bg$ log-cvx.

Appli : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est log-cvx.

III- Inégalités, applications

Inég Arith-Géom : : Pour tout nombres positifs $x_1, \dots, x_n$, on a : $(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, avec égalité ssi tous les x_i sont égaux.
Appli : Méthode de Newton avec f cvx.

Appli : 1) Pour minimiser les coûts on cherche à un volume donné la surface minimale de carton nécessaire à la fabrication d'une brique de lait.
2) Soit un triangle d'aire S et de demi-périmètre p, on a $S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$.

Prop : Inégalité de Hölder
$p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \geqslant 0$. On a : $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$
Appli : Inégalité de Minkowski
$p \geqslant 1$ réel et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ réels. On a :
$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^p\right)^{1/p}$

Appli : $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ vérifie l'inégalité triangulaire c'est donc une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Prop : Inégalité de Jensen
Si $\phi, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec ϕ est cvx et f continue alors $\phi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leqslant \int_0^1 \phi \circ f(x)dx$

Appli : $p \mapsto \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p}$ est croissante $(p \geqslant 1)$

José Gregorio : http://agregorio.net

Remarques et commentaires :

1. Attention, dans I on écrit $x \mapsto e^x$ est cvx. Comment le démontre-t-on à ce stade ? Par exemple : la fonction exponentielle est continue et vérifie aisément $e^{(x+y)/2} \leqslant \frac{e^x+e^y}{2}$. Donc, avec le premier exercice...
2. Quand a-t-on égalité dans Hölder ou Minkowski ? Lorsque $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ sont proportionnelles.
3. Évidemment il y a trop de choses, il faut en passer à la trappe et faire des choix (15min !)
4. Pour la méthode de Newton avec avec ordre 2 et f convexe voir "Analyse MPSI" de Jean-Marie Monier (Dunod).
5. Il ne faut malgré tout surtout pas hésiter à faire des dessins !
6. Aucun résultat n'est vraiment très compliqué il faut donc tout savoir démontrer !
7. La leçon étant assez simple et classique il est nécessaire de savoir se démarquer par des exemples et applications qui sortent un peu de l'ordinaire.
8. Le piège est de s'emmêler les pinceaux entre les diverses implications : quelle propriété découle de quelle autre. Cela doit être très clair lors d'une prestation orale.
9. ζ est log-cvx preuve : $\zeta_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$. On a avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz (qu'on peut retrouver avec l'inégalité de Hölder, mais pas nécessairement)

   $$(\zeta_N'(x))^2 = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{-\ln(n)}{n^x}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\ln(x)^2}{n^x}\right)\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}\right)$$

   Donc en passant à la limite $(\zeta')^2 \leqslant \zeta''\zeta$, ce qui revient à dire que la dérivée seconde de $\ln \circ \zeta$ est positive.

10. J'ai présenté cette leçon il y a quelques années lors d'un oral blanc, mon développement était le suivant :
    Prop : f log-cvx $\Rightarrow$ cvx, puis Prop : f log-cvx ssi $(\forall c > 0)$ $x \mapsto f(x)c^x$ cvx et enfin Γ est log-cvx grâce à cette dernière propriété (Pour plus de détails voir la section "Développements" du site, Une caractérisation de la log-convexité et fonction Γ).

Bibliographie :

"*Les maths en tête Analyse*" de Xavier Gourdon (Ellipse).
"*Cours de mathématiques Tome 2 - Analyse*" de Jean-Marie Arnaudiès, Jacqueline Lelong-Ferrand (Dunod)
"*Analyse MPSI : Cours, méthodes et exercices corrigés*" de Jean-Marie Monier (Dunod)