209 : Séries de fonctions. Propriétés de la somme, exemples.

Prérequis : notions de convergences de suites de fonctions. $X \subset \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ensemble quelconque ; $(\forall n \in \mathbb{N})$ $f_n : X \to \mathbb{K}$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ et $R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ si définie.

I- Définitions

Déf 1 : On dit $\sum f_n$ converge simple sur X si S_n converge simplement sur X (notation : **CS**)

Déf 2 : On dit $\sum f_n$ converge uniformément sur X si S_n converge unif. sur X (notation : **CU**)

Déf 3 : On dit $\sum f_n$ converge absolument sur X si $\sum |f_n(.)|$ converge simplement sur X (notation : **CA**)

Déf 4 : On dit $\sum f_n$ converge normalement sur X si les f_n sont bornées sur X à partir d'un certain rang et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge dans $\mathbb{R}$ (notation : **CN**)

Exemples :
$f_n(x) = x^n$. On a $\sum f_n$ CS sur $]-1;1[$, CU sur $[a;b] \subset]0;1[$.

$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. pour $n \geq 1$ CS sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}^-$.
Pas de CA, ni CN.

En référence à d'autres parties du cours :

Lemme d'Abel : Si la suite $(a_n r^n)$ est bornée dans $\mathbb{C}$ alors on a CA de la série $\sum a_n z^n$ sur $D(0;r)$.

Si f est 2π-périodique continue et dérivable alors sa série de fourier CS vers f. Si de plus f est $\mathcal{C}^1$ par morceau alors on a CN. (Résultats admis à ce stade)

II- Critères uniformes et implications

Th (Cauchy uniforme) :
$\sum f_n$ *CU* si et seulement si $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})$ $(\forall q > p \geq N)$ $\left\| \sum\limits_{k=p}^{q} f_k \right\|_\infty < \varepsilon$

Prop (critère d'Abel uniforme) :
$f_n(x) = a_n(x) b_n(x)$ ou $\forall x$, $(a_n(x))_n$ est réelle décroissante et (a_n) CU vers 0 ; $b_n : X \to \mathbb{K}$ telles que et $\exists B > 0, N \in \mathbb{N}$ tel que $q \geq p \geq N$ $\left\| \sum\limits_{k=p}^{q} b_k \right\|_\infty \leq B$ alors $\sum f_n$ CU sur X.

Exemple : $\alpha > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n^\alpha}$ CU sur $[a;b] \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Prop : $\sum f_n$ *CU* $\Leftrightarrow$ $\sum f_n$ *CS* et R_n *CU* vers 0.

Exemple : $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ CU sur $[a;+\infty[/\mathbb{Z}^-, a \in \mathbb{R}$

Th (schéma d'implications)
On a le schéma d'implications suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{CA} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathbf{CN} & & & & \mathbf{CS} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \mathbf{CU} & & \end{array}$$

Exemple : $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ et $\theta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

ζ CS et CA sur $]1;+\infty[$, CU,CN sur $[a;+\infty[, a > 1$

θ CS sur $]0;+\infty[$, CA sur $]1;+\infty[$, CU sur $[a;+\infty[, a > 0$ et CN sur $[a;+\infty[, a > 1$

III- Propriétés de la somme

1) Continuité

Th : Si $a \in \overline{X}$, $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$ existe et $\sum f_n$ CU vers f sur X alors $\sum l_n$ cv et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \sum l_n$

Coro : Si f_n sont continues et $\sum f_n$ CU sur X vers f alors f est continue sur X.

exemples : ζ est continue sur $]-1;+\infty[$ et θ est continue sur $]0;+\infty[$
$\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Il existe φ continue sur $\mathbb{R}$ dérivable nulle part (Van der Waerden) Mo p. 330

2) Intégration

Th : Si $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a;b]$ et $\sum f_n$ CU sur $[a;b]$ alors $\sum f_n$ est intégrable et $\int_a^b (\sum f_n) = \sum \int_a^b f_n$

Exemple : $\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)n!}$

Si $f = \sum a_n z^n$, R, rayon de CV alors $\forall r \in]0;R[$, $\forall n$ $2\pi r^n a_n = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$ Gd p. 237

3) Dérivabilité

Th : I intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\mathring{I} \neq \emptyset$.
Si les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur I, $\sum f_n$ CS vers f et $\sum f'_n$ CU alors f est $\mathcal{C}^1$ et $f' = \sum f'_n$

Exemples : ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;+\infty[$. Soit $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Si la suite $(n^4 a_n^2)_{n\geq 0}$ est sommable alors $\sum a_n e^{inx}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ X-ENS An2 p.112
Si $f_0 : [a;b] \to \mathbb{R}$ continue, $f_{n+1}(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ alors $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ est dérivable sur $[a;b]$. X-ENS An2p.113

José Gregorio : http://agregorio.net

$f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = \ln(1+x)$ CU sur $[0;1]$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln 2 = \sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

$g(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4} = \sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Complément :

<u>Th (Abel)</u> : Si $R>0$ et $\sum a_n R^n$ converge alors $\sum a_n x^n$ CU sur $[0;R]$ $\boxed{\text{X-ENS An2 p.178}}$

<u>Th CV dominée</u> (en fonction du temps)

<u>Démonstration du critère d'Abel uniforme</u> :

Posons pour $p \leq q$: $\sum_{p,q} = \sum\limits_{k=p}^{q} a_k b_k$ et $B_{p,q} = \sum\limits_{k=p}^{q} b_k$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{p,q} &= a_p b_p + a_{p+1}b_{p+1} + \cdots + a_q b_q = a_p B_{p,p} + a_{p+1}(B_{p,p+1} - B_{p,p}) + \cdots + a_q(B_{p,q} - B_{p,q-1}) \\ &= B_{p,p}(a_p - a_{p+1}) + B_{p,p+1}(a_{p+1} - a_{p+2}) + \cdots + B_{p,q-1}(a_{q-1} - a_q) + B_{p,q}a_q. \qquad \text{(transformation d'Abel).}\end{aligned}$$

On a donc, pour $x \in X$ et $q \geq p \geq N$ et en tenant compte que (a_n) est décroissante :

$$\begin{aligned}\|\textstyle\sum_{p,q}(x)\| &\leq \|B_{p,p}(x)\|(a_p(x) - a_{p+1}(x)) + \|B_{p,p+1}(x)\|(a_{p+1}(x) - a_{p+2}(x)) + \cdots + \|B_{p,q-1}(x)\|(a_{q-1}(x) - a_q(x)) + \|B_{p,q}(x)\|a_q(x) \\ &\leq B(a_p(x) - a_{p+1}(x) + a_{p+1}(x) - a_{p+2}(x) + \cdots + a_{q-1}(x) - a_q(x) + a_q(x)) = Ba_p(x)\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N' tel que $p \geq N' \quad \Rightarrow a_p(x) \leq \varepsilon/B$ pour tout x de X d'après (ii).
Pour $q \geq p \geq \max(N, N')$ et $x \in X$ on a donc :
$\sum_{p,q}(x) \leq \varepsilon$, d'où le résultat grâce au critère de Cauchy uniforme.

On peut aller un peu plus loin mais pour des questions de temps...
Prérequis :
Notions de convergences de suites de fonctions.
$X \subset E$ ensemble quelconque ; Si F est un banach alors $(\mathcal{L}_c(F), \|.\|)$ est un banach.

$\mathcal{L}_c(F)$ muni de la norme d'opérateur est un banach.

Si $u \in \mathcal{L}_c(F)$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ CN (donc converge dans un banach) et est noté e^u. $\boxed{\text{Cart p.21-22}}$

Si $u \in \mathcal{L}_c(F)$ et $\|u\| < 1$ alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u^n$ CN et est inversible d'inverse $1-u$.

permet de montrer que $Isom(F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}_c(F)$ et que $u \mapsto u^{-1}$ est continue de $Isom(F)$ dans lui même $\boxed{\text{Cart p.21-22}}$