161 : Étude métrique des courbes planes.

Prérequis : $k \in \mathbb{N}^*$, C^k-difféomorphisme, arc régulier, th. changement de var. I et J intervalles non vide de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ munit du produit scalaire usuel

I- Paramétrages et longueur

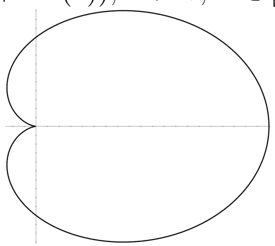
Déf : Soient $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J, \mathbb{R}^2)$ deux arcs paramétrés. On dit que g est un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de f s'il existe un $\mathcal{C}^k$-difféo $\varphi : J \to I$ tq $g = f \circ \varphi$

Exple :
$f(t) = (\cos(t), \sin(t))$
$g(t) = (\cos(t), -\sin(t))$
$h(t) = (\cos(t^3 + t), \sin(t^3 + t))$

Prop : Dans la déf précédente, on dit que f et g sont "$\mathcal{C}^k$-équivalent". "Être $\mathcal{C}^k$-équivalent à" est une relation d'équivalence sur l'ens. des arcs $\mathcal{C}^k$. On peut considérer qu'une courbe est une classe d'éq.

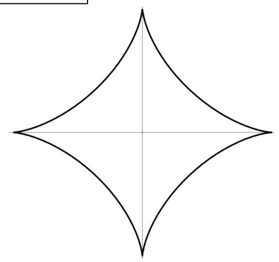
Déf-Prop : Soient $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$, $(a, b) \in I^2$, $A = f(a)$, $B = f(b)$. On appelle longueur de l'arc $\widehat{AB}$: $l(\widehat{AB}) = |\int_a^b \|f'(t)\| dt|$.
La longueur d'un arc est une prop. géom. de la courbe qui ne dépend pas du param. admissible.

Exples :
Cercle : $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$, $l(\mathcal{C}) = 2\pi$
Cardioïde :
$\rho(\theta) = a(1 + \cos(\theta))$, $a > 0$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, $l(\Gamma) = 8a$

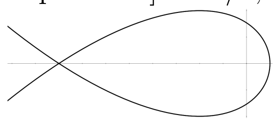


Déf : On appelle abscisse curviligne d'origine $t_0 \in I$ d'un arc $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ l'application :
$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du$ qui est la longueur algébrique de l'arc $\widehat{f(t_0)f(t)}$. Le calcul de s s'appelle rectification de la courbe.
Théo : Soit $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^2)$ régulier. Toute abscisse curviligne s de f est un $\mathcal{C}^k$-difféo de I sur $s(I)$ et $f \circ s^{-1}$ est un param. adm. de classe $\mathcal{C}^k$ appelé param. **normal** de l'arc.

Exples : Rectification de la parabole $y^2 = 2px$. Rectification de l'astroïde : $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$ avec $a > 0$. $\boxed{\text{Mo. p. 230}}$



Exo : Tracer, rectification et longueur de $\rho(\theta) = (\cos^3(\theta/3))^{-1}$ pour $\theta \in]-3\pi/2, 3\pi/2[$



Prop : Si g est un para. adm. de classe $\mathcal{C}^k$ de f régulier alors : g est normal ssi $\|g'\| = 1$

II- Repère de Frenet et courbure $(k \geqslant 2)$

Déf : Γ une courbe dont f est un para. normal. Le vecteur tangent unitaire de Γ en $M(s) = f(s)$ est $\vec{T} = \frac{d\vec{M}}{ds}$, on pose $\vec{N} = R_{\pi/2}(\vec{T})$ de sorte que $(M, \vec{T}, \vec{N})$ est un rond, repère de Frenet en M à Γ.

Appli : la normale en M à une ellipse de foyer F_1, F_2 est la bissectrice intérieure de $\widehat{F_1 M F_2}$

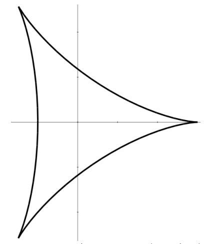
Théo (relèvement) : Si f un para normal de classe $\mathcal{C}^k$ de Γ alors $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^{k-1}$ tq
$\vec{T}(s) = \cos(\varphi(s))\vec{i} + \sin(\varphi(s))\vec{j}$.
$\varphi(s)$ est l'angle $(\vec{i}, \vec{T}(s))$, on a alors $\frac{dx}{ds} = \cos(\varphi)$ et $\frac{dy}{ds} = \sin(\varphi)$.

Déf : En tout point $M(s)$ birégulier, le rayon de courbure en $M(s)$ de Γ est le réel $R = \frac{ds}{d\varphi}$. La courbure en $M(s)$ à Γ est : $\gamma = \frac{1}{R}$. Le cercle osculateur en M, le cercle de centre $K = M + R\vec{N}$ et de rayon $|R|$.

Exples : Rayon de courbure de l'arc de deltoïde :

$R = -8\sin(3t/2)$
$t \in]0; 2\pi/3[$

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases}$$

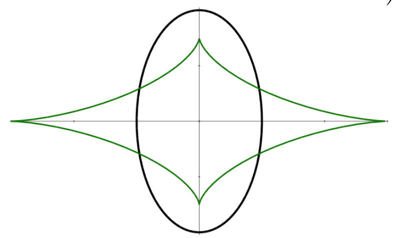


Rayon de courbure de la cardioïde :$4a/3\cos(\theta/2)$

Théo : Pour tout arc birégulier, on a :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R} \text{ et } \frac{d\vec{N}}{ds} = -\frac{\vec{T}}{R}$$

Exo : Calculer le rayon de courbure de l'ellipse en tout point. Décrire la développée de l'ellipse (ensemble des centres des cercles osculateurs)



Exo :Soit ω l'angle entre T et (MF_1) montrer que $2/R = (1/r_1 + 1/r_2)\sin(\omega)$

José Gregorio : http://agregorio.net