144 : Différentes notions de rang en algèbre linéaire.

Prérequis : e.v., base, th. base incomplète, application linéaire, dual, $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs, $\mathbb{K}$ un corps commutatif,
E, F, G des $\mathbb{K}$-e.v.

I- Famille de vecteurs

Déf : Si $Vect\,(\mathcal{F})$ est de dimension finie alors on appelle rang de $\mathcal{F}$: $rg\,(\mathcal{F}) = \dim\,(\text{Vect}\,(\mathcal{F}))$.

Prop : Si $Vect\,(\mathcal{F})$ est de dimension finie alors
$rg\,(\mathcal{F}) = \max\{card\,(\mathcal{G})\,; \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{G} \text{ est libre }\}$

Exemples : $0 < a_1 < \cdots < a_n$, n réels. Les familles suivantes sont de rang n dans le $\mathbb{R}$ e.v. des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
$(x \mapsto e^{a_n x})_n$
$(x \mapsto \cos\,(a_n x))_n$ Gd p. 111
$(x \mapsto |x - a_n|)_n$

Exo : Mo p. 204
Soit $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ et $f_{a_i}(x) = \cos(x + a_i)$. Quel est le rang de $(f_{a_1}, f_{a_2}, f_{a_3})$ dans le $\mathbb{R}$ e.v. $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

II- Applications linéaires

Déf : Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\dim\,(Im(f)) < +\infty$ alors on appelle rang de f l'entier : $rg(f) = \dim\,(Im(f))$.

Prop : Si $\mathcal{B}$ est une base de E de dimension finie alors $rg(f) = rg\,(f\,(\mathcal{B}))$

Th (du rang) : Si $\dim(E) < +\infty$ alors on a :
$\dim(E) = rg(f) + \dim\,(Ker(f))$

Appli. formule de Grassmann F, G s.e.v. de E
$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Si $f \in \mathcal{L}(E)$ dim finie alors $inj \Leftrightarrow surj \Leftrightarrow bij$

Exo : $F_1, \ldots, F_k$ des s.e.v. de E tels que :
$\sum_{i=1}^{k} \dim(F_i) > n(k-1)$ alors $\bigcap_{i=1}^{k} F_i \neq \{0\}$
XENS1 p.259

Prop : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors :
(i) $rg(g \circ f) \leqslant \min(rg(f), rg(g))$
(ii) si $g \in \mathcal{I}som(F, G)$ alors $rg(g \circ f) = rg(f)$
(iii) si $f \in \mathcal{I}som(E, F)$ alors $rg(g \circ f) = rg(g)$
Mo2 p. 14

Exo : $\dim(E) = n,\ f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
$|rg(f) - rg(g)| \leqslant rg(f+g) \leqslant rg(f) + rg(g) \leqslant n + rg(fg)$
XENS1 p. 272
$rg(f+g) = rg(f) + rg(g) \Leftrightarrow$
$(Im(f) \cap Im(g) = \{0\}$ et $ker(f) + ker(g) = E)$

Prop : $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$, r formes linéaires sur E dim n.
on a : $rg\,(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = n - \dim\left(\bigcap_{i=1}^{r} Ker\varphi_i\right)$.
Gd p. 133

Appli : Montrer que
$\bigcap_{i=1}^{r} Ker\,\varphi_i \subset Ker\,\psi \Longleftrightarrow \psi \in \text{Vect}\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$

III- Matrices (*dimension finie*)

Déf : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le $rg(A)$ est le rang de ses vecteurs colonnes dans $\mathbb{K}^n$.

Prop : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$; $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ bases de E et F alors $rg(A) = rg(f)$

Exo : Montrer que $rg({}^tAA) = rg(A)$

Prop : Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r alors M est équivalente à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Mo p. 253

Coro : Deux matrices équivalentes ont même rang.

Topologie : Soit $V_r = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}); rg(A) = r\}$
Déterminer l'adhérence et l'intérieur de V_r
XENS2 p. 217

Exo : Soit $\mathbb{K}$ un sous corps de $\mathbb{C}$ et p un projecteur.
Montrer que $tr(p) = rg(p)$. Gd p. 122
Si $P(t) = \det(tA + B)$, ou $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ alors $\deg(P) \leqslant rg(A)$ XENS1 p. 322

Th (Rouché-Fontené) : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $AX = B$ admet des solutions ssi $rg(A) = n$ ou les $n - r$ déterminants caractéristiques sont nuls. Gd p.138
Exple : exemple1 p. 138 du Gd ou un autre.

Déf : Soit Φ une forme quadr. sur E . On appelle $rg(\Phi)$ le rang de sa matrice dans une base qcq.
Exo : Déterminer le rang de Φ définie dans la base canonique par $A = (ch(a_i - a_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ So p.290

José Gregorio : http://agregorio.net