143 : Polynômes à une indéterminée à coefficients réels ou complexes.

Prérequis : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ définition et opérations de base sur les polynômes, degré, dérivé, arithmétique dans $\mathbb{Z}$.

I- En algèbre

Prop : ($\mathbb{K}$[X],+,.,.) est une $\mathbb{K}$ algébre associative, commutative et unitaire $(1, X, X^2, ...)$ est une base (canonique).
$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}(X); deg(P) \leqslant n\}$ on a
$dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$

exo : $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$, si $i \leq j$, 1 si $i = 1$, 0 sinon. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}. Gd p.122

Prop : $\forall i \in I \quad P_i \neq 0$ et $i \neq j \Rightarrow deg(P_i) \neq deg(P_j)$ alors $(P_i)_{i \in I}$ est libre. Mo p.125

Exo : $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathbb{C}[X]$. Mq $\exists! P \in \mathbb{C}[X]$ tq $P(X - \alpha) + P(X - \beta) = A$. Mo p.132

Prop :si $deg(P) \leqslant 0$ alors $deg(P') = -\infty$,
sinon $deg(P') = deg(P) - 1$

Exo : Résoudre $X(X + 1)P'' + (X + 2)P' - P = 0$
Mo p. 132

Th : $\mathbb{K}[X]$ est euclidien.
Exo : Quand a-t-on $B|A$ avec Arn p. 262
$A(X) = X^4 + aX^2 + bX + c$ par $B(X) = X^2 + X + 1$

Coro : $\mathbb{K}[X]$ est principal (donc factoriel) on a donc des irreductibles,PGCD, Bézout, Gauss,...

App : Existence du polynôme minimal.
Th. décomposition des noyaux

Prop : $deg(P) = 1 \Rightarrow$ P est irred.
$X^2 + 1$ est irred dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}[X]$

Exo : Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux. Montrer que $AB + BC + CA$ et ABC sont premiers entre eux. Mo p. 146
Exo : $PGCD(X^m - 1, X^n - 1)$? Arn p.266
En déduire $\left(\sum_{k=0}^{m-1} X^k\right) \wedge \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k\right) = 1$ si $m \wedge n = 1$

II- Analyse

Prop : Le morphisme de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ qui $P \to \tilde{P}$ (fonction polynôme) est injectif.

Prop : (Taylor) $(\forall a \in \mathbb{K})(\forall P \in \mathbb{K}[X])$
$P(X + a) = \sum_{k=0}^{deg(P)} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$ Mo p. 129

Déf : $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ de P si $P^{(i)}(\alpha) = 0$ pour tout $i \in \{0, ..., k - 1\}$
et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$
Prop : α racine d'ordre $k \Leftrightarrow (X - \alpha)^k | P$ et $(X - \alpha)^{k+1} \not| P$

Coro : si $deg(P) = n$ alors P a au plus n racines.

Déf : P est scindé s'il est produit de poly de deg=1.

Th : Tout poly est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Les irréd. de $\mathbb{R}[X]$ sont les poly de degré 1 ou 2 avec $\Delta < 0$
Mo p.156

Prop : $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ scindé de racines $x_1, ..., x_n$
$\sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 < ... < i_p \leq n} x_{i_1} \ldots x_{i_p} = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n}$

App 1 : $\mathcal{E}$ une ellipse d'eq. para. $x = a\,cos(t)$; $y = b \sin(t)$. $A, B, C, D \in \mathcal{E}$ de paramètres t_1, t_2, t_3, t_4 sont cocycl. ssi $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}$

App 2 : Calculer $\zeta(2)$ avec $n \in \mathbb{N}, t \in]0, \pi/2[$
$P_n(\text{cotan}^2 t) = \frac{\sin(2n + 1)t}{\sin^{2n+1} t}$ XENS p. 207

Th (Gauss-Lucas) : Si $P \neq cst$ alors
$racines\,(P') \subset conv\,(racines\,(P))$

App : $P \neq cst$, H_1 et H_2, 2 demi-plans ouverts séparés par une droite Δ dans $\mathbb{C}$ si P' a une racine dans H_1 alors $P(H_1) = \mathbb{C}$. XENS p.229

Th : Pour $, a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$ 2 à 2 distincts et tout $b_0, ..., b_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme P tel que $deg(P) \leqslant n$ et $P(a_i) = b_i \; \forall i \in \{1, ..., n\}$

Exo : $deg(P) = n$
si $(\exists k \in \mathbb{Z})$ tq $P(k), P(k+1), ..., P(k+n) \in \mathbb{Z}$ alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. XENS p. 199

Th(W.) : Tout $f \in C([a, b], \mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de polynômes. Meu T3 p. 116
App. :Soit f continue tq $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \int_a^b t^n f(t)dt = 0$
Montrer que $f = 0$

José Gregorio : http://agregorio.net