142 : Utilisation de groupes en géométrie.

Prérequis-Notations :
$\mathcal{E}$ esp. aff. euc. dim n (svt 2 ou 3) dirigé par E e.v. Déf. transf. aff., $O(n)$, $SO(n)$ et actions de groupes. $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{A}_n$, $D_n, \ldots$

I- Quelques groupes infinis en géométrie

1) Angles orientés

Th : $SO(2)$ est un s-g commutatif de $GL_2(R)$

Prop-Déf : $SO(2)$ opère de manière naturelle sur $\widehat{\mathcal{A}} = \{(u,v) \in E^2; u, v \text{ unitaires}\}$. L'orbite de (u,v) est appelée angle orienté de u et v. En notant $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence induite, $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{A}}/\mathcal{R}$ est muni d'une structure de groupe abélien.

Audin p. 62

2) Homothéties-Translations

Th : L'ensemble $\mathcal{H}$ union des translations $\mathcal{T}$ et des homothéties de $\mathcal{E}$ est un s-g distingué et non commutatif de $\mathrm{Aut}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{T} \lhd \mathcal{H}$. Combes p. 120

Appli. (Pappus) :
P, Q, R (resp. U, V, W) alignés sur $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}$) 2à2 distincts. si $(PV) /\!/ (QU)$ et $(QW) /\!/ (RV)$ alors $(RU) /\!/ (PW)$. Tauvel p. 44

Appli. (Ménélaüs) :
Soit ABC un triangle, $A' \in (BC)\backslash\{B, C\}$, $B' \in (AC)\backslash\{A, C\}$, $C' \in (AB)\backslash\{A, B\}$ alors :

$$A', B', C' \text{ alignés} \iff \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

Arnaudiès T4 p. 211

II- Groupes finis en géométries

Prop : Soit G un s-g fini de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$. Pour tout $A \in \mathcal{E}$ l'isobarycentre des $(g(A))_{g\in G}$ est invariant pour tout $g \in G$ et G est alors isomorphe à un s-g fini de $O(E)$.
De plus, on a soit $G^+ = G$ soit G^+ est d'indice 2 dans G.

Appli. Montrer qu'un s-g fini de $\mathrm{Is}(\mathcal{E}_2)$ est isomorphe à un groupe cyclique ou à un groupe diédral.
Arnaudiès T4 p. 238

Th : Soit G un s-g fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. G opère sur X la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ et il y alors au plus 3 stabilisateurs non réduit à $\{\mathrm{I}\}$ et on peut dénombrer 5 cas possibles pour de tels ordres.
Berger p. 43 ou Combes p. 171 ou XENS T1 p.54

Coro : Un s-g fini de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou $D_{\frac{n}{2}}$ ou $\mathcal{A}_4$ ou $\mathcal{S}_4$ ou $\mathcal{A}_5$.

Exemple : Le groupe des isométries du cube est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{S}_4$ (et est donc d'ordre 48)

Arnaudiès T4 p. 241 ou XENS T1 p. 73

Simplexe régulier unité : partie $\{A_0, \ldots, A_n\}$ de $\mathcal{E}$ telle que $\|A_i - A_j\| = 1$ pour tout $i \neq j$.
Le groupe des isométries positives du simplexe régulier unité en dimension n est isomorphe à $\mathcal{A}_{n+1}$

Arnaudiès p. 240 ou XENS T3 p. 313

III- Objets décrits à l'aide de groupes

1) Réseaux

Soit (u, v, w) une base de $\mathbb{R}^3$ et $\Lambda = \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$. Si r est une rotation d'angle θ de $\mathbb{R}^3$ telle que $r(\Lambda) = \Lambda$ alors $\theta \in \{0, \pi, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{2\pi}{3}\}$

Réciproquement, si θ est l'une de ces valeurs alors il existe un réseau Λ et une rotation r d'angle θ qui laisse Λ invariant

XENS T3 p. 333

2) Pavage

Déf : Soit G un s-g de $\mathrm{Is}^+(\mathbb{R}^2)$. On dit que G est un groupe de pavage s'il existe un compact connexe d'intérieur non vide P de $\mathbb{R}^2$ tel que :
(i) $\bigcup_{g\in G} g(P) = \mathbb{R}^2$ $\quad (ii)$ $\widehat{\overset{\circ}{g(P)}} \cap \widehat{\overset{\circ}{h(P)}} \neq \varnothing \Rightarrow g = h$

Prop 1 : Les orbites sous G sont discrètes.

Prop 2 : Le s-g des translations de G est un réseau de $\mathbb{R}^2$

Th : À conjugaison près dans $GL(\mathbb{R}^2)$ il n'existe que 5 groupes de pavages dans $\mathrm{Is}^+(\mathbb{R}^2)$.
Berger p. 31

José Gregorio : http://agregorio.net

Le groupe du pavage est peut être un peut trop osé, technique et difficilement exposable en 15 min (voir impossible à moins de passer beaucoup de choses à la trappe) On peut également parler du groupe de frises dans la partie 3

Groupe de frises

Déf : Une frise est un s-g G de $\mathrm{Is}(\mathcal{E})$ tel que $G \cap \mathcal{T} \simeq \mathbb{Z}$. $\boxed{\text{Tauvel p. 285}}$