117 : Groupe orthogonal d'un espace vectoriel euclidien de dimension 2, de dimension 3.

Références : principalement "Algèbre MPSI" de J.M. Monier, chapitres Groupe orthogonal, Géométrie vectorielle plane/en dimension 3.

Prérequis et notations :
Déf. symétrie, réflexion. Changement de base, déterminant, trace, composante connexe par arc.
E e.v.e. orienté de dim $n = 2, 3$.

I- Généralités

1) Endomorphismes

Déf : $f \in \mathcal{L}(E)$ est orthogonal si f conserve le produit scalaire.

Exemples : Id, symétrie orthogonale. Attention : les projecteurs ortho. ne sont pas des endo. ortho.

Prop : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence : $f \in \mathcal{O}(E)$ $\Leftrightarrow$ l'image de toute *b.o.n.* est une *b.o.n.*

2) Matrices

Déf : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tMM = I_n$.
On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ l'ens. des matrices orthogonales.
On a alors $\det(M) = \pm 1$.

Prop : $f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow (\forall, \mathcal{B}\, b.o.n.)\ [f]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Déf : On note $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de déterminant 1. (isom. positives)

Prop : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ sont des groupes compacts, $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est distingué d'indice 2 dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

II- Isométries du plan

Déf : On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; $S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$
R_θ est appelée rotation d'angle θ

Th : $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta ; \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S_\varphi ; \varphi \in \mathbb{R}\}$

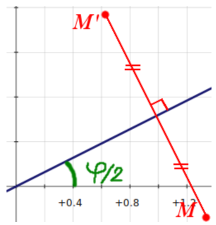
Prop : $\forall u, v \in E$ unitaires $(\exists! \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})\ R_\theta(u) = v$
θ est l'angle de u et v noté $(\widehat{u, v})$.
$\theta \mapsto R_\theta$ est un isom de grpe de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to$ dans $\mathcal{SO}_2$

Coro : $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

Prop : La matrice d'une rotation est invariante par changement de b.o.n.d.

Prop :

$(\forall \varphi \in \mathbb{R})$, S_φ est la matrice d'une réflexion d'axe $\mathcal{D}$ d'angle polaire $\varphi/2$.



Exo : Montrer que : $S_\varphi \circ R_\theta \circ S_\varphi = R_\theta^{-1}$ et $S_\varphi \circ S_{\varphi'} = R_{\varphi - \varphi'}$

Prop : Les rotations conservent les angles orientés et les réflexions les changent en leurs opposés.

Th : un s-g fini de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à un groupe cyclique ou un groupe diédral.

III- Isométries de l'espace

Prop : Si $f \in \mathcal{O}(E)$ alors 1 ou -1 est toujours valeur propre de f.

Coro
$(\forall f \in \mathcal{O}(E))(\exists \mathcal{B}\, b.o.n.)$, $[f]_{\mathcal{B}}$ est de l'un des types :
$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $S_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Déf : Une rotation d'axe $\vec{\Delta}$ dirigé et orienté par u unitaire et d'angle θ est l'endo. de E dont la matrice dans une *b.o.n.d.* (u, v, w) est R_θ.

Th : Soit $f \in \mathcal{O}(E), f \neq Id$.
1) Si $\det(f) = 1$ alors f est une rotation d'axe dirigé par u et d'angle θ tq $tr(f) = 1 + 2\cos\theta$ et $sg(\det(u, x, f(x))) = sg(\sin\theta), \quad \forall x \in E$.
2) Si $\det(f) = -1$ alors f est une réflexion ou la composée d'une rotation d'axe u et d'une réflexion de plan orthogonal à u.

Exo : Reconnaitre $[f] = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

Prop : Toute rotation s'écrit comme produit de deux réflexions.

Coro : Les retournements engendrent $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

Th : $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple. $\boxed{\text{XENS T3 p. 67}}$

José Gregorio : http://agregorio.net