EDHEC voie S 2017 - Un corrigé (non relu)

Exercice 1

1. (a) On peut compléter le programme comme suit :

```
function y=f(x,n)
    y=sum(x.^(1:n))
endfunction
```

(b) Pour $x \neq 1$, on a : $f_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1$ et pour $x = 1$, $f_n(x) = n$. Le programme peut alors s'écrire :

```
function y=f(x,n)
    if x==1 then y=n
            else y=(1-x^(n+1))/(1-x)-1
    end
endfunction
```

2. f est continue et dérivable (c'est un polynôme) et sa dérivée, donnée par l'expression $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$, est strictement positive sur $[0,1]$. f réalise donc une bijection croissante de $[0,1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0,n]$. Le nombre $1 \in [0,n]$ possède donc un unique antécédent dans $[0,1]$ par f.

Conclusion :

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'équation } f_n(x) = 1 \text{ possède une unique solution } \alpha_n \text{ dans } [0,1]}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_n^k = f_n(\alpha_n) + \alpha_n^{n+1} = 1 + \alpha_n^{n+1}$$

Or, $\alpha_n \in [0,1]$, donc $\underline{f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant 1}$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$$

et comme f_{n+1} est strictement croissante, on peut alors conclure que : $\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$.
Conclusion :

$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$

(b) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0.
Conclusion :

$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers une limite } \ell \in [0,1].}$

4. (a) Par définition, α_2 est l'unique solution de l'équation $x + x^2 = 1$ dans $[0,1]$. Un simple calcul de discriminant donne alors $\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. De plus $1 \leqslant \sqrt{5} < 3$ donne directement les inégalités demandées.
Conclusion :

$\boxed{\alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ et on a bien } 0 \leqslant \alpha_2 < 1.}$

(b) $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, on a pour tout entier $n > 1$:

$$0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_2 < 1$$

et donc :

$$0 \leqslant \alpha_n^{n+1} \leqslant \alpha_2^{n+1} < 1$$

Or, puisque $\alpha_2 \in [0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_2^{n+1} = 0$ et par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0.}$$

(c) D'après 1.(b), α_n est l'unique solution, dans $[0,1]$, de l'équation $\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - 1 = 1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1-\alpha_n^{n+1}}{1-\alpha_n} = 2, \quad \text{ou encore :} \quad 1-\alpha_n^{n+1} = 2(1-\alpha_n)$$

Or, d'après les questions précédentes,

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell$$

La limite ℓ de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc : $1 = 2(1-\ell)$ et donc $\ell = \frac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \tfrac{1}{2}.}$$

5. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. On sait déjà que f_n est croissante sur $[0,1]$ et $f_n(0) = 0$. Le programme va alors tester toutes les valeurs de $f_n(x)$ à partir de $x = 0$ et avec un pas de 0,001 tant que $f_n(x) < 1$. La valeur affichée par le programme est alors le premier de ces nombres pour lequel $f_n(x) \geqslant 1$. Le résultat affiché est donc le plus petit nombre du type $k \times 0,001$ ($k \in \mathbb{N}$) supérieur ou égal à α_n.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Le résultat affiché est donc une valeur approchée par excès à 0,001 près de } \alpha_n.}$$

Exercice 2

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par indépendance des variables $X_1, \ldots, X_n$, on a :

$$F_{M_n}(x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leqslant x)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x < 0 \\ x^n & \text{, si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{, si } x > 1 \end{cases}$$

Les limites à gauches et à droites de la fonction de répartition F_{M_n} en 0 et en 1 conïncident avec les valeurs de F_{M_n} en ces points, F_{M_n} est alors bien continue en 0 et en 1. La continuité ailleurs étant évidente, F_{M_n} est alors continue sur $\mathbb{R}$. De plus F_{M_n} est dérivable sauf peut être en 0 et en 1, M_n est donc bien une variable à densité.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} M_n \text{ est une variable à densité et sa fonction de répartition est} \\ \text{définie pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ par } F_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x < 0 \\ x^n & \text{, si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{, si } x > 1 \end{cases} \end{array}}$$

(b) Une densité de f_{M_n} est alors obtenue en dérivant F_{M_n} là où elle est dérivable et en prenant des valeurs arbitraires en 0 et en 1.

Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Une densité } f_{M_n} \text{ de } M_n \text{ est définie pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ par :} \\ f_{M_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, si } x < 0 \\ nx^{n-1} & \text{, si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{, si } x > 1 \end{cases} \end{array}}$$

(c) Les intégrales suivantes sont absolument convergentes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{M_n}(x)\mathrm{d}x \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{M_n}(x)\mathrm{d}x$$

car f_{M_n} est nulle en dehors de $[0,1]$ et les intégrandes sont continues sur le segment $[0,1]$. M_n et M_n^2 admettent donc bien une espérance que l'on calcule :

$$E(M_n) = \int_0^1 nx^n \mathrm{d}x = \left[\frac{n}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}$$

$$E(M_n^2) = \int_0^1 nx^{n+1} \mathrm{d}x = \left[\frac{n}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1 = \frac{n}{n+2}$$

Conclusion :

$$\boxed{M_n \text{ et } M_n^2 \text{ admettent donc bien une espérance, } E(M_n) = \frac{n}{n+1} \text{ et } E(M_n) = \frac{n}{n+2}}$$

(d) M_n admettant un moment d'ordre 2, $(M_n-1)^2$ admet une espérance et est positive, on peut donc appliquer l'inégalité de Markov à $(M_n-1)^2$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\left((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{E\left((M_n-1)^2\right)}{\varepsilon^2}$$

Or, par linéarité de l'espérance,

$$E\left((M_n-1)^2\right) = E(M_n^2) - 2E(M_n) + 1 = \frac{n}{n+2} - \frac{2n}{n+1} + 1 = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

et donc
Conclusion :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad P\left((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) \leqslant \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2}}$$

(e) Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)\varepsilon^2} = 0$, donc par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2\right) = 0$.
Or, $((M_n-1)^2 \geqslant \varepsilon^2) = (|M_n - 1| \geqslant \varepsilon)$, on peut donc conclure.
Conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P\left(|M_n-1| \geqslant \varepsilon\right) = 0 \text{ et ce résultat signifie que la suite } (M_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.}}$$

2. (a) Dans le programme proposé, `X` est une réalisation de n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. M_n peut alors être simulée à l'aide de la fonction `max` :

```
function Y=f(n)
    X = grand(1,n,'unf',0,1)
    Y = n*(1-max(X))
endfunction
```

(b) Les deux histogrammes sont très proches, les simulations de Y_n sont donc prochent des simulations d'une loi exponentielle de paramètre 1.
Conclusion :

$$\boxed{\text{On peut conjecturer que } (Y_n) \text{ converge en loi vers une variable de loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

3. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F_{Y_n}(x) = P(Y_n \leqslant x) = P(n(1-M_n) \leqslant x) = P\left(M_n \geqslant 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - F_{M_n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)$$
La dernière égalité étant vraie car M_n est à densité.
Et avec 1.(a)
Conclusion :
$$\boxed{F_{Y_n}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, si } 1 - \frac{x}{n} < 0 \Leftrightarrow x > n \\ 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{, si } 0 \leqslant 1 - \frac{x}{n} \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{, si } 1 - \frac{x}{n} > 1 \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}}$$

(b) Soit $x \geqslant 0$. Pour $n \geqslant x$, on a d'après 3.(a),
$$F_{Y_n}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$
Or, $\lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$. En effet, $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$, donc $n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -x$, ou encore $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right) = -x$. Reste alors à utiliser la continuité de la fonction exponentielle pour obtenir ce qui était annoncé.
Conclusion :
$$\boxed{\text{Pour tout } x \geqslant 0,\ \lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = 1 - e^{-x}.}$$

(c) Pour tout $x < 0$, $F_{Y_n}(x) = 0$ et avec 3.(b), on peut conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x)$ tend, quand $n \to +\infty$, vers la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1.
Conclusion :
$$\boxed{(Y_n) \text{ converge en loi vers une variable de loi exponentielle de paramètre 1.}}$$

Exercice 3

1. (a) On a évidemment $A = J - (n+1)I$ et donc, puisque I et J commutent :
$$A^2 = J^2 - 2(n+1)J + (n+1)^2 I$$
Or, un calcul simple donne : $J^2 = nJ$. Donc :
$$A^2 = nJ - 2(n+1)J + (n+1)^2 I = -(n+2)J + (n+1)^2 I$$
Conclusion :
$$\boxed{A = J - (n+1)I \quad \text{et} \quad A^2 = -(n+2)J + (n+1)^2 I}$$

(b) Avec ce qui précède, on a :
$$A^2 + (n+2)A = (n+1)^2 I - (n+1)(n+2)I = -(n+1)I$$
Donc :
$$A^2 + (n+2)A + (n+1)I = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$$
Et $P(X) = X^2 + (n+2)X + n + 1 = (X+1)(X+n+1)$ est un polynôme annulateur de A et les valeurs propres possibles de A sont les racines de P.
Conclusion :
$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Un polynôme annulateur de } A \text{ est } P(X) = X^2 + (n+2)X + n + 1 \\ \text{et les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1 \text{ et } -(n+1).\end{array}}$$

(c) 0 n'est pas une valeur propre possible.
Conclusion :
$$\boxed{A \text{ est inversible.}}$$

2. On a : $\|u\| = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\left\|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\right\|$ et $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ étant orthonormale, $\left\|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\right\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} 1^2} = \sqrt{n+1}$.
   Conclusion :

   $$\boxed{u \text{ est unitaire : } \|u\| = 1.}$$

3. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Par linéarité du produit scalaire et $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ étant orthonormale,

   $$\langle \varepsilon_i, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\langle \varepsilon_i, \varepsilon_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

   Donc,

   $$\|e_i\| = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left\|\varepsilon_i - \frac{1}{\sqrt{n+1}}u\right\| = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left\|\varepsilon_i - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\right\|$$

   Ou encore :

   $$\|e_i\| = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left\|\frac{n}{n+1}\varepsilon_i - \frac{1}{n+1}\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}\varepsilon_k\right\|$$

   et toujours avec $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ orthonormale,

   $$\|e_i\| = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \sqrt{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 + n \times \frac{1}{(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \times \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+1)^2}} = 1$$

   Conclusion :

   $$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![0, n]\!], \text{ on a : } \|e_i\| = 1.}$$

   (b) Soient (i, j) un couple d'entiers distincts de $[\![0, n]\!]$, on a :

   $$\langle e_i, e_j\rangle = \frac{n+1}{n}\langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u,\ \varepsilon_j - \langle \varepsilon_j, u\rangle u\rangle$$

   et par linéarité du produit scalaire :

   $$\langle e_i, e_j\rangle = \frac{n+1}{n}\left(\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle u, \varepsilon_j\rangle + \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle \varepsilon_j, u\rangle\|u\|^2\right)$$

   Or, $(\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n)$ est orthonormale et nous avons vu dans 3.(a) que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\langle \varepsilon_i, u\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, donc :

   $$\langle e_i, e_j\rangle = \frac{n+1}{n}\left(0 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n}$$

   Conclusion :

   $$\boxed{\text{Pour tout } (i, j) \text{ un couple d'entiers distincts de } [\![0, n]\!], \text{ on a : } \langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}}$$

   (c) Montrons que, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\sqrt{\frac{n}{n+1}}e_i = (\varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u) \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$, on aura alors le résultat démandé.
   Soit $i \in [\![0, n]\!]$, on a :

   $$\langle \varepsilon_i - \langle \varepsilon_i, u\rangle u, u\rangle = \langle \varepsilon_i, u\rangle - \langle \varepsilon_i, u\rangle\langle u, u\rangle = 0 \text{ , car } \|u\| = 1$$

   Conclusion :

   $$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![0, n]\!],\ e_i \in F = (\mathrm{Vect}(u))^\perp}$$

(d) On a : $\dim(F) = \dim(E) - \dim(\text{Vect}(u)) = n$ (car $u \neq 0_E$). Il suffit alors de montrer que les n vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de F forment une famille libre. Considérons une combinaison linéaire égale à 0_E :

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_E$$

On a alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle e_i, e_j \rangle = 0_E$$

Ou encore avec les conclusions de 3. (a) et (b) :

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \frac{-\alpha_i}{n} + \alpha_j = \frac{-1}{n} \left(\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \alpha_i - n\alpha_j \right) = 0_E$$

Donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \alpha_i - n\alpha_j = 0_E$$

et $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ est alors solution de l'équation matricielle $AX = 0$, or d'après 1.(c), A est inversible, donc pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$ et la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est constituée de n vecteurs linéairement indépendants dans F, qui est de dimension n.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{(e_1, \ldots, e_n) \text{ est une base de } F = (\text{Vect}(u))^{\perp}.}$$

4. (a) Pour tout $(x, y, z) \in F^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$f(x, y) \in \mathbb{R}$ et $f(x, y) = f(y, x)$, f est donc une <u>forme symétrique</u>.

$$f(\lambda x + y, z) = \sum_{k=0}^{n} \langle \lambda x + y, e_k \rangle \langle z, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle \lambda x + y, z \rangle$$

$$f(\lambda x + y, z) = \sum_{k=0}^{n} \left(\lambda \langle x, e_k \rangle \langle z, e_k \rangle + \langle y, e_k \rangle \langle z, e_k \rangle\right) - \frac{n+1}{n} \left(\lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle\right)$$

$$f(\lambda x + y, z) = \lambda \left(\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle z, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle x, z \rangle \right) + \sum_{k=0}^{n} \langle y, e_k \rangle \langle z, e_k \rangle - \frac{n+1}{n} \langle y, z \rangle$$

ou encore, $f(\lambda x + y, z) = \lambda f(x, z) + f(y, z)$, et f étant symétrique, f est alors bien <u>bilinéaire</u>.

<u>Conclusion</u> :

$$\boxed{f \text{ est une forme bilinéaire et symétrique.}}$$

(b) Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $f(e_i,e_j) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_j\rangle$.

Or, d'après les questions précédentes, pour $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = -\frac{1}{n}$ et $\langle e_i, e_i\rangle = 1$, donc :
D'une part avec $i = j$,

$$f(e_i,e_i) = \langle e_i, e_i\rangle^2 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\neq i}} \langle e_i, e_k\rangle^2 - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_i\rangle$$

$$f(e_i,e_i) = 1 + n \times \frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n} = 0$$

D'autre part avec $i \neq j$,

$$f(e_i,e_j) = \langle e_i, e_i\rangle\langle e_j, e_i\rangle + \langle e_i, e_j\rangle\langle e_j, e_j\rangle + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n \\ k\neq i, k\neq j}} \langle e_i, e_k\rangle^2 - \frac{n+1}{n}\langle e_i, e_j\rangle$$

$$f(e_i,e_j) = \frac{-2}{n} + (n-1) \times \frac{1}{n^2} - \frac{n+1}{n} \times \frac{-1}{n} = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ f(e_i,e_j) = 0.}$$

(c) D'après 3.(d), $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de F et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $f(e_i,e_j) = 0$, donc f est nulle sur $F \times F$. Donc :

$$\forall (x,y) \in F^2, f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle - \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle = 0$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in F^2,\ \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle y, e_k\rangle = \frac{n+1}{n}\langle x, y\rangle.}$$

(d) Soit $x \in F$. En appliquant la conclusion précédente avec $y = x$, on obtient :

$$\frac{n+1}{n}\langle x, x\rangle = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\langle x, e_k\rangle$$

Soit encore :

$$\frac{n+1}{n}\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in F,\ \|x\|^2 = \frac{n}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle^2.}$$

Problème
Partie 1 : étude d'une application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

1. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P^{(k)} \in \mathbb{R}_n[X]$, φ est donc bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(\lambda P+Q) = \sum_{k=0}^{n}(\lambda P+Q)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\lambda P^{(k)} + Q^{(k)}\right) = \lambda\sum_{k=0}^{n} P^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)} = \lambda\varphi(P)+\varphi(Q)$$

et φ est alors bien linéaire.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

2. (a) e_0 est le polynôme constant égal à 1, donc pour tout $k \geqslant 1$, $(e_0)^{(k)}$ est nul. Donc :

$$\varphi(e_0) = \sum_{k=0}^{n}(e_0)^{(k)} = e_0$$

De plus, e_0 n'est pas le polynôme nul.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi(e_0) = e_0 \text{ et 1 est une valeur propore de } \varphi.}$$

(b) Soit $j \in [\![1, n]\!]$. On a :

$$\varphi(e_j) - e_j = e_j + \sum_{k=1}^{n}(e_j)^{(k)} - e_j = \sum_{k=1}^{n}(e_j)^{(k)}$$

Or, $e_j \in \mathbb{R}_j[X]$ avec $j \geqslant 1$, donc pour tout entier $k \geqslant 1$, $(e_j)^{(k)}$ appartient à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{j-1}[X]$.
Conclusion :

$$\boxed{\forall j \in [\![1, n]\!], \quad (\varphi(e_j) - e_j) \in \mathbb{R}_{j-1}[X].}$$

(c) D'après les questions précédentes, $\varphi(e_0) = e_0$ et pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $Q_{j-1} \in \text{Vect}(e_0, \ldots, e_{j-1})$ tel que $\varphi(e_j) = Q_{j-1} + e_j$. La matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ s'écrit donc :

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & \times & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice étant triangulaire, les valeurs propres de φ sont alors les coeffcients diagonaux.
Conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La matrice de } \varphi \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est donc triangulaire supérieure,} \\ \text{l'unique valeur propre de } \varphi \text{ est 1.}\end{array}}$$

(d) $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ est triangulaire supérieure à coeffcients diagonaux non nul, elle est donc inversible et φ est alors un endomorphisme bijectif.
Conclusion :

$$\boxed{\varphi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a $P' = P^{(1)} \in \mathbb{R}_n[X]$ et par télescopage :

$$\varphi(P - P') = \sum_{k=0}^{n} (P - P')^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \left(P^{(k)} - P^{(k+1)}\right) = P - P^{(n+1)}$$

Or, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $P^{(n+1)}$ est nul.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P - P') = P.}$$

(b) Posons $\psi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\psi(P) = P - P'$. ψ est « évidemment » un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et d'après la question précédente :

$$\varphi \circ \psi = Id_{\mathbb{R}_n[X]} \text{ et en composant par } \varphi^{-1}, \quad \psi = \varphi^{-1}$$

On a alors $\varphi^{-1}(e_0) = e_0$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\varphi^{-1}(e_k) = e_k - ke_{k-1}$.

Conclusion :

φ^{-1} est définie pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi^{-1}(P) = P - P'$ et la matrice de φ^{-1} dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -k \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) La deuxième ligne du programme crée M, la matrice identité d'ordre $(n+1)$, puis la boucle change les coefficents au dessus de la diagonale pour que M soit égale à $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1})$. Pour obtenir $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ il suffit alors d'inverser M.

```
n=input('entrez la valeur de n : ')
M=eye(n+1,n+1)
for k=1:n
    M(k,k+1)=-k
end
A=inv(M)
disp(A)
```

Partie 2 : étude d'une autre application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$

4. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par croissance comparée, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^k e^{-t} e^{t/2} = 0$ et donc $t^k e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(e^{-t/2}\right)$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-t/2}\mathrm{d}t$ converge et donc, par le critère de négligeabilité des intégrales de fonctions positives au voisinage de $+\infty$, $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

(b) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. Or, d'après (a), pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_x^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t$ converge, donc $\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t} \mathrm{d}t$ converge comme combinaison linéaire d'intégrales convergentes.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } P \in \mathbb{R}_n[X] \text{ et tout } x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

5. (a) Calculons cette intégrale. Pour tout $b > x$, on a :

$$\int_x^b e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-t}\right]_x^b = e^{-x} - e^{-b}$$

Or, $\lim\limits_{b \to +\infty} e^{-b} = 0$, donc l'intégrale converge et vaut e^{-x}.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x}.}$$

(b) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Pour $k = 0$ c'est la question précédente.
Supposons que, pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$ on ait : $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$.
Effectuons alors une intégration par parties pour calculer $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t}\mathrm{d}t$.
$u : t \mapsto t^{k+1}$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$ sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,
$u' : t \mapsto (k+1)t^k$ et $v' : t \mapsto e^{-t}$, et pour tout $b > x$:

$$\int_x^b t^{k+1} e^{-t}\mathrm{d}t = \left[-t^{k+1}e^{-t}\right]_x^b - \int_x^b -(k+1)t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$\int_x^b t^{k+1} e^{-t}\mathrm{d}t = x^{k+1}e^{-x} - b^{k+1}e^{-b} + (k+1)\int_x^b t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{b \to +\infty} b^{k+1}e^{-b} = 0$ et la convergence de l'intégrale étant déjà acquise, on en déduit :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t}\mathrm{d}t = x^{k+1}e^{-x} + (k+1)\int_x^{\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

Soit encore, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\int_x^{+\infty} t^{k+1} e^{-t}\mathrm{d}t = x^{k+1}e^{-x} + (k+1)k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} = (k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$$

L'hypothèse étant initialisée pour $k = 0$ et héréditaire, elle est alors vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in \mathbb{R}, \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x}.}$$

6. (a) D'après l'énoncé, `p=prod(1:k)` est égal à $k!$

```
k=input('entrez la valeur de k : ')
x=input('entrez la valeur de x : ')
p=prod(1:k)
u=x.^(1:k)./cumprod(1:k)
s=p*(1+sum(u))*exp(-x)
disp(s)
```

`u` est le vecteur dont les coordonnées sont $\left(\dfrac{x^i}{i!}\right)_{1\leqslant i\leqslant k}$

(b) x étant fixé dans $\mathbb{R}$, posons $u = t - x$ qui est bien un changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, +\infty[$. On a alors, pour $b > x$:

$$\int_x^b t^k e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{b-x}(u+x)^k e^{-x-u}\mathrm{d}u = e^{-x}\int_0^{b-x}(u+x)^k e^{-u}\mathrm{d}u$$

et la convergence quand $b \to +\infty$ étant déjà acquise, on a bien le résultat demandé.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\in\mathbb{R},\ \int_x^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x}\int_0^{+\infty}(u+x)^k e^{-u}\mathrm{d}u.}$$

On sait, grâce au théorème de transfert et les intégrales étant convergentes, que : $\int_0^{+\infty}(u+x)^k e^{-u}\mathrm{d}u$ est l'espérance d'une variable $(Z+x)^k$ où Z suit la loi exponentielle de paramètre 1. Pour obtenir une valeur approchée de cette intégrale avec la méthode de Monte-Carlo, il suffit de simuler un grand nombre (ici 100 000) de réalisations indépendantes de variables $(Z+x)$ et donc :

```
x=input('entrez la valeur de x : ')
k=input('entrez la valeur de k : ')
Z=grand(1,100000,'exp',1)
s=exp(-x)*mean((Z+x).^k)
disp(s)
```

7. (a) Soient $(P,Q)\in(\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. $(\lambda P+Q)\in\mathbb{R}_n[X]$ et donc, d'après 4.(b), les intégrales suivantes sont, pour tout $x\in\mathbb{R}$, toutes convergentes et :

$$\int_x^{+\infty}(\lambda P+Q)(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda\int_x^{+\infty}P(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty}Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

et donc, en multipliant par e^x, on obtient :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad [\Psi(\lambda P+Q)](x) = \lambda[\Psi(P)](x) + [\Psi(Q)](x)$$

Autrement dit, $\Psi(\lambda P+Q) = \lambda\Psi(P)+\Psi(Q)$ et <u>Ψ est linéaire</u>.
Montrons maintenant que, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\Psi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$. Pour cela, il suffit de le vérifier pour les polynômes de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, la linéarité fera le reste. Soit alors $k\in[\![0,n]\!]$. D'après 5.(b) et la définition de Ψ, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$[\Psi(X^k)](x) = e^x\times\left(k!\sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}e^{-x}\right) = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}x^i\in\mathbb{R}_n[X]$$

et donc, par linéarité de Ψ, pour tout $P = \sum\limits_{k=0}^{n}a_kX^k\in\mathbb{R}_n[X],\ \Psi(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.
Conclusion :

$$\boxed{\Psi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

(b) D'après la question précédente, F est un polynôme et est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la convergence permet d'écrire la relation de Chasles, valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t - \int_0^x P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est alors une constante, donc de dérivée nulle par rapport à x et d'après le théorème fondamental du calcul, $x \mapsto \int_0^x P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée : $x \mapsto P(x)e^{-x}$. En dérivant, par rapport à x la fonction produit $x \mapsto F(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t}\mathrm{d}t$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = F(x) + e^x(-P(x)e^{-x}) = F(x) - P(x)$$

Conclusion :

$$\boxed{F \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } F' = F - P.}$$

(c) Notons 0 le polynôme nul et soit $P \in \mathrm{Ker}(\Psi)$. On a alors $F = \Psi(P) = 0$. Donc $F' = 0$ et d'après la question précédente : $F - P = 0$, mais comme $F = 0$ on a immédiatement $P = 0$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(\Psi) \subset \{0\}$ et l'inclusion réciproque étant evidente, $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{0\}$ et Ψ est injective. De plus $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, l'endomorphisme Ψ est alors, par corollaire du théorème du rang, bijectif.
Conclusion :

$$\boxed{\Psi \text{ est un automorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

8. (a) Avec les donnée de l'énoncé, on a $F = \Psi(P) = \lambda P$ et, d'après 7.(b), $F' = (\lambda P)' = F - P$. Donc : $\lambda P' = \lambda P - P = (\lambda - 1)P$. Reste alors à diviser par $\lambda \neq 0$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Pour } P \neq 0 \text{ vecteur propre associé à une valeur propre } \lambda \neq 0, \text{ on a : } P' = \frac{\lambda - 1}{\lambda} P.}$$

(b) Remarquons tout d'abord que 0 ne peut pas être valeur propre puisque Ψ est un automorphisme.
Posons $\deg(P) = k \in [\![0, n]\!]$. Si P est constant ($k = 0$) alors $P' = 0 = \frac{\lambda-1}{\lambda}P$ et comme $P \neq 0$, on a $\lambda = 1$. Si P n'est pas constant ($k \in [\![1, n]\!]$) alors $\deg(P') = k - 1 = \deg\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}P\right)$ ce qui est impossible car $\deg\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}P\right) = \begin{cases} k & , \text{si } \lambda \neq 1 \\ -\infty & , \text{si } \lambda = 1 \end{cases}$
Conclusion :

$$\boxed{\lambda = 1 \text{ est la seule valeur propre possible de } \Psi.}$$

Remarque : avec ce que nous avons fait à la question 7. (a), nous aurions tout aussi bien pu montrer que la matrice de Ψ dans la base canonique est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1.

(c) D'après 5.(a), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_x^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = e^{-x}$. Donc, $[\Psi(1)](x) = e^x \times e^{-x} = 1$. Autrement dit, $\Psi(1) = 1$ et le polynôme constant égal à 1 est un vecteur propre de Ψ associé à la valeur propre 1. Avec la question précédente, on sait que c'est la seule.
Conclusion :

$$\boxed{1 \text{ est la seule valeur propre de } \Psi.}$$

9. (a) Ψ et φ sont tous les deux des automorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour montrer que Ψ et φ sont égaux il suffit de montrer qu'ils coïncident sur la base canonique. Soit $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

D'une part
$$(X^k)^{(i)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-i+1)X^{k-i} & , \text{si } i \leqslant k \\ 0 & , \text{si } i > k \end{cases}$$
et donc :
$$\varphi(X^k) = \sum_{i=0}^{n} (X^k)^{(i)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} = \sum_{j=0}^{k} \frac{k!}{j!} X^j$$
La dernière éaglité étant obtenue par le renversement d'indice $j = k - i$.

D'autre part, d'après 5.(b),
$$\Psi(X^k) = e^x \int_x^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t = e^x \left(k! \sum_{i=0}^{k} \frac{x^i}{i!} e^{-x} \right) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x^i$$
Donc : $\varphi(X^k) = \Psi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
Conclusion :

$$\boxed{\text{Les endomorphismes } \varphi \text{ et } \Psi \text{ sont égaux.}}$$

(b) Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \geqslant a$, $P(x) \geqslant 0$. Dans ce cas, $t \mapsto P(t)e^{-t}$ est positive sur $[x, +\infty[$ et par positivité de l'intégrale, on a :
$$\forall x \geqslant a, \quad [\Psi(P)](x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t} \mathrm{d}t \geqslant 0$$
Mais comme φ et Ψ sont égaux, on a alors :
$$\forall x \geqslant a, \quad [\varphi(P)](x) \geqslant 0$$
ce qui est exactement le résultat recherché.
Conclusion :

$$\boxed{\forall x \geqslant a, \quad \sum_{i=0}^{n} P^{(i)}(x) \geqslant 0}$$