Exercice : (Un calcul de $\zeta(2)$)

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$,

$$P_n(\text{cotan}^2 t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t}$$

b) Calculer la somme des racines de P_n.

c) Montrer que $\text{cotan}^2 t \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant 1 + \text{cotan}^2 t$ et en déduire que $\zeta(2) = \sum\limits_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

<u>solution</u> :

a) Soit $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$, on a par la formule de Moivre puis le binôme de Newton :

$$\sin(2n+1)t = \text{Im}\left(e^{i(2n+1)t}\right) = \text{Im}\left((\cos t + i \sin t)^{2n+1}\right) = \text{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{k} (i \sin t)^k \cos^{2n+1-k} t\right)$$

Donc en ne gardant que les entiers k impairs :

$$\sin(2n+1)t = \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1} t \cos^{2(n-k)} t$$

Donc en divisant par $\sin^{2n+1} t$,

$$\frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t} = \sum_{k=1}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k \text{cotan}^{2(n-k)} t$$

On en déduit facilement la forme du polynôme $P_n(X) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{2n+1}^{2k+1} (-1)^k X^{n-k}$.

b) Il suffit de voir l'expression $P_n(\text{cotan}^2 t) = \dfrac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t}$ valable pour $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ pour s'apercevoir que P_n s'annule quand $\sin(2n+1)t = 0$ à savoir quand $t = \frac{k\pi}{2n+1}$ avec $k \in [\![1; n]\!]$ et les racines de P_n sont donc $\left(\text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)_{1 \leqslant k \leqslant n}$. On a donc trouvé n racines distinctes pour le polynôme P_n qui est de degré n, il est donc scindé et d'après les relations coefficients-racines, la somme des racines de P_n est égale à l'opposé du coefficient de X^{n-1} divisé par celui de X^n :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = -1 \times \frac{-C_{2n+1}^{3}}{C_{2n+1}^{1}} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

c) On a les inégalités classiques $0 \leqslant \sin t \leqslant t \leqslant \tan t$ valable sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ (*facile avec une étude de fonction*). Soit en élevant au carré et en prenant l'inverse :

$$\text{cotan}^2 t \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \text{cotan}^2 t$$

En prenant $t = \frac{k\pi}{2n+1}$, on obtient : $x_k \leqslant \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 \leqslant 1 + x_k$ soit en sommant :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leqslant \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par $\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}$, l'encadrement nous donne alors par passage à la limite $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarques :

1. Le polynôme répondant à la première questions est unique puisque tout autre polynôme vérifiant l'égalité demandée serait égal à P_n sur un intervalle.

2. Les racines $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont bien deux à deux distinctes puisque la fonction cotan est strictement monotone sur $]0; \frac{\pi}{2}[$.

3. Cet exercice nécessite évidemment de connaitre les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé, ce qui peut être la source de questions du jury.

Thèmes abordés :

* Trigonométrie
* Polynôme
* Série numérique
* Relations coefficients-racines

Bibliographie :

"Oraux X-ENS, Algèbre 1" de de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas (CASSINI).

José Gregorio : http://agregorio.net