$\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est un groupe simple.

1. Si G est un sous-groupe distingué de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ et G_0 est la composante connexe par arc de Id dans G alors G_0 est distingué dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
2. Si $G \neq \{\mathrm{Id}\}$ est un sous groupe distingué de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ connexe par arc alors $G = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
3. Si G est distingué dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ alors $G = \{\mathrm{Id}\}$ ou $G = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

1. Soient $g, h \in G_0 \neq \emptyset$. Par définition de la composante connexe de Id, il existe des chemins γ, α qui relient Id respectivement à g et h dans G. Posons alors $\beta(t) = \gamma(t) \circ (\alpha(t))^{-1}$, c'est une application continue (puisque $\alpha \mapsto \alpha^{-1}$ est continue, il suffit pour s'en convaincre de fixer une base, les coefficients de α^{-1} dans cette base sont alors polynomialement déterminés par ceux de α). De plus $\beta(0) = \mathrm{Id}$ et $\beta(1) = g \circ h^{-1}$, β est donc un chemin reliant Id à $g \circ h^{-1}$ ce qui par définition signifie que $g \circ h^{-1} \in G_0$. Donc G_0 est un sous-groupe de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
   Montrons qu'il est distingué dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, on pose $\delta(t) = k \circ \gamma(t) \circ k^{-1}$, δ est alors un chemin reliant $\delta(0) = \mathrm{Id}$ à $\delta(1) = k \circ g \circ k^{-1}$, donc $k \circ g \circ k^{-1} \in G_0$ et G_0 est distingué dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

2. Soient $\varphi : \mathcal{SO}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ l'application qui à $h \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ associe $\frac{tr(h)-1}{2}$ et g une rotation de G différente de Id et d'angle $\theta \in]0, \pi]$ (quitte à prendre g^{-1} pour avoir $\theta \in]0, \pi]$).
   Si $\varphi(g) = \cos(\theta) \leqslant 0$ alors on pose alors $s = g$, sinon avec $N = \mathrm{E}\left(\frac{\pi/2}{\theta}\right)$, on a $N\theta \leqslant \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < \pi$ et on pose $s = g^{N+1}$. Dans tous les cas $s \in G$ et $\varphi(s) \leqslant 0$. De plus G est la composante connexe par arc de Id, il existe donc un chemin γ reliant Id à s et $\varphi \circ \gamma$ est continue. Or $\varphi \circ \gamma(0) = \varphi(\mathrm{Id}) = 1$ et $\varphi \circ \gamma(1) = \varphi(s) \leqslant 0$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in]0, 1]$ tel que $\varphi \circ \gamma(t_0) = 0$, donc $\gamma(t_0)$ est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ et $r = (\gamma(t_0))^2$ est alors un retournement.
   Montrons maintenant que G contient tous les retournements de l'espace, comme $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements on aura alors montré que $G = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$. Soit h un retournement d'axe dirigé par un vecteur v unitaire. Le retournement r est dirigé par un vecteur unitaire u. Il existe $k \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ tel que $k(u) = v$ et puisque G est distingué dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$, krk^{-1} est alors un retournement de G d'axe $k(u) = v$. Donc $krk^{-1} = h$ et G contient tous les retournements, donc $G = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.

3. Soient G un sous-groupe distingué de $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ et G_0 la composante connexe par arc de Id dans G. D'après 2) G_0 est distingué dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ et d'après 3) $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ ou alors $G_0 = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$.
   Si $G_0 = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ alors $G = \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ et c'est fini.
   Si $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$ alors toutes les composantes connexes par arc dans G sont des singletons. En effet, si $g \in G$ et h appartient à la composante connexe par arc de g alors il existe un chemin γ reliant g à h et $t \mapsto g^{-1} \circ \gamma(t)$ est un chemin reliant Id à $g^{-1} \circ h = \mathrm{Id}$ puisque $G_0 = \{\mathrm{Id}\}$. Donc $g = h$ et la composante connexe par arc de g dans G est bien réduite à un singleton. Dans ce cas montrons que $G = \{\mathrm{Id}\}$ en raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe $g \in G$ avec $g \neq \mathrm{Id}$. Soit $k \in \mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$ une rotation d'angle θ et k_t la rotation de même axe que k et d'angle $t\theta$ ($t \in [0, 1]$). Il existe une b.o.n. B dans laquelle la matrice de k_t est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t\theta & -\sin t\theta \\ 0 & \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix}$, $k_t g k_t^{-1} \in G$ (car G est distingué dans $\mathcal{SO}_3(\mathbb{R})$) et $t \mapsto k_t g k_t^{-1}$ est un chemin reliant g à $kgk^{-1} = g$ puisque la composante connexe par arc de g est réduite à un singleton. Donc g commute avec une rotation quelconque k autrement dit g commute avec toutes les rotations de l'espace, donc $g = \mathrm{Id}$ d'où $G = \{\mathrm{Id}\}$.

Remarques :

1. Il ne faut évidemment pas se lancer dedans le jour de l'oral si l'on a pas déjà fait cette démonstration de nombreuses fois. C'est assez long et difficile à tenir en 15 minutes, ou alors il faut omettre des détails quitte à les expliquer après.

2. Trois notions se dégagent très nettement et nécessitent une parfaite connaissance avant l'exposé : sous-groupe d'un groupe, sous-groupe distingué et connexité par arc. On part du principe que ce sont des pré-requis qui peuvent éventuellement faire l'objet de questions du jury.

Thèmes abordés :

* Groupes, sous-groupes et sous-groupes distingués
* Connexité par arc
* Rotation de l'espace
* Théorème des valeurs intermédiaires

Bibliographie :

"Oraux X-ENS : Algèbre 3" de Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas, chez CASSINI

José Gregorio : http://agregorio.net