Théorème

Pour $n \geqslant 5$, le groupe alterné A_n est simple (il n'a pas d'autre sous-groupe distingué autre que lui-même et le groupe trivial).

prérequis :
On rappel que le groupe alterné A_n est engendré par l'ensemble des 3-cycles ou par l'ensemble des doubles transpositions et ceci dès que $n \geqslant 3$. On suppose dans toute la suite que $n \geqslant 5$.

preuve :
Nous allons procéder en trois étapes : dans un premier temps nous allons montrer que deux 3-cycles sont toujours conjugués dans A_n, ensuite nous montrerons que deux doubles transpositions sont toujours conjuguées dans A_n et enfin nous montrerons qu'un sous-groupe distingué et non trivial de A_n contient toujours un 3-cycle ou une double transposition, il les contiendra alors tous.

1)
Soient $\sigma = (a, b, c)$ et $\sigma' = (a', b', c')$ deux 3-cycles. Posons $\alpha \in S_n$ telle que $\alpha(a) = a'$, $\alpha(b) = b'$ et $\alpha(c) = c'$. On vérifie alors que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \sigma'$. Si $\alpha \in A_n$ alors les deux 3-cycles sont bien conjugués dans A_n et si $\alpha \notin A_n$ on peut poser $\beta = \alpha \circ (de)$ où $d, e \notin \{a, b, c\}$ alors $\beta \in A_n$ et vérifie $\beta\sigma\beta^{-1} = \alpha(de)\sigma(de)\alpha^{-1} = \sigma'$ puisque σ et (de) commutent (ils n'ont pas le même support). Donc , dans tous les cas, les 3-cycles sont conjugués dans A_n.

2)
Soient $\sigma = (ab)(cd)$ et $\sigma' = (a'b')(c'd')$ deux doubles transpositions. Posons $\alpha \in S_n$ telle que $\alpha(a) = a'$, $\alpha(b) = b'$, $\alpha(c) = c'$ et $\alpha(d) = d'$. On vérifie alors que $\alpha\sigma\alpha^{-1} = \sigma'$. Si $\alpha \in A_n$ alors les deux doubles transpositions sont bien conjuguées dans A_n et si $\alpha \notin A_n$ on peut poser $\beta = \alpha \circ (ab)$ alors $\beta \in A_n$ et vérifie $\beta\sigma\beta^{-1} = \alpha(ab)\sigma(ab)\alpha^{-1} = \sigma'$. Donc les doubles transpositions sont conjuguées dans A_n.

3)
Soient H un sous-groupe distingué et non trivial de A_n et $\sigma \in H$, $\sigma \neq Id$. Posons $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$ la décomposition de σ en cycles à supports disjoints classés par longueurs décroissantes ($l(\sigma_i) \geqslant l(\sigma_{i+1})$). Quatre cas se présentent :

1[er] cas : $l(\sigma_1) = r > 3$.
Par exemple $\sigma_1 = (a_1 \cdots a_r)$. Posons alors $\sigma' = (a_1a_2a_3)\sigma(a_1a_2a_3)^{-1} \in H$ (car H est distingué dans A_n). En qualité de groupe, l'élément suivant appartient alors aussi à H :

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}\sigma' &= \sigma_k^{-1} \cdots \sigma_1^{-1}(a_1a_2a_3)\sigma_1 \cdots \sigma_k(a_1a_2a_3)^{-1} \\
&= \underbrace{\sigma_1^{-1}(a_1a_2a_3)\sigma_1}(a_1a_2a_3)^{-1} \text{ (car les cycles } \sigma_2, \ldots, \sigma_k \text{ sont à supports disjoints de } (a_1a_2a_3)) \\
&= (a_1a_2a_r)(a_1a_2a_3)^{-1} \\
&= (a_1a_3a_r), \qquad H \text{ contient donc un 3-cycle.}
\end{aligned}$$

2[ème] cas : $l(\sigma_1) = 3$ et $l(\sigma_i) = 2$ pour tout $i > 1$.
Dans ce cas $\sigma^2 \in H$ est un 3-cycle (les σ_i sont en fait des transpositions pour $i > 2$).

3[ème] cas : $l(\sigma_1) = l(\sigma_2) = 3$. Par exemple, $\sigma_1 = (abc)$ et $\sigma_2 = (xyz)$.
Nous avons alors $\sigma' = (bcx)\sigma(bcx)^{-1} \in H$ et donc $\sigma^{-1}\sigma' \in H$ or

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}\sigma' &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(bcx)\sigma_1\sigma_2(bcx)^{-1} \\
&= (abxcz), \qquad \text{on peut alors conclure avec le 1}^{er} \text{ cas et } H \text{ contient alors un 3-cycle.}
\end{aligned}$$

4[ème] cas : $l(\sigma_i) = 2$ pour tout i (les σ_i sont toutes des transpositions), avec par exemple $\sigma_1 = (ab)$ et $\sigma_2 = (cd)$.
Nous avons alors $\sigma' = (bcd)\sigma(bcd)^{-1} \in H$ et donc $\sigma^{-1}\sigma' \in H$ or

$$\begin{aligned}
\sigma^{-1}\sigma' &= \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}(bcd)\sigma_1\sigma_2(bcd)^{-1} \\
&= (ad)(cb), \qquad H \text{ contient donc une double transposition.}
\end{aligned}$$

En conclusion, un sous-groupe distingué et non trivial H de A_n ($n \geqslant 5$) contient toujours un 3-cycle ou une double transposition. Par conjugaison H, qui est distingué dans A_n, contient alors tous les 3-cycles ou toutes les doubles transpositions et comme ceux-ci engendrent A_n tout entier, on a nécessairement $H = A_n$. Donc A_n est simple pour $n \geqslant 5$.

José Gregorio : http://agregorio.net

Remarques :

1. Il ne vaut mieux pas avoir de doute sur ce qu'est un sous-groupe distingué.

2. Il faut absolument avoir une idée de la démonstration que A_n est engendré par l'ensemble des 3-cycles ou par l'ensemble des doubles transpositions. (assez facile)

3. A_n est-il simple pour $n < 5$? Réponse : A_2 est trivial, A_3 n'a pas de sous-groupe strict autre que le sous-groupe trivial, il est donc simple. A_4 possède le groupe de Klein comme sous-groupe distingué strict, il n'est donc pas simple.

4. À quoi cela sert-il ? Une réponse possible : cela intervient en théorie de Galois dans la notion de groupes résolubles.

Thèmes abordés :

* Permutation
* Cycle
* Transposition
* Conjugaison
* Groupes symétriques, alternés, distingués, simples.

Bibliographie :

"Théorie de Galois, cours et exercices corrigés" de Jean-Pierre Escofier (DUNOD-2000)

José Gregorio : http://agregorio.net