Propriétés :

On note $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante des nombres premiers positifs et $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers inférieurs à n. On a alors les deux résultats suivants :

a) La série numérique $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p_n}$ diverge.

b) $\pi(n)$ est un petit "o" de n.

Preuve :

a) Soit $p_n\in\mathbb{P}$. On a $\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p_n}\right)^k$ (résultat classique sur les séries géométriques).

Soit $N\in\mathbb{N}$, on a pour tout $l\in\mathbb{N}$: $\prod\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}}=\prod\limits_{n=1}^{N}\left(\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{p_n^k}\right)\geqslant\prod\limits_{n=1}^{N}\left(\sum\limits_{k=0}^{l}\dfrac{1}{p_n^k}\right)$.

Or si on se donne un nombre entier $a\leqslant p_N$ on est sur que sa décomposition en facteurs premiers est du type $a=p_1^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot p_N^{\alpha_N}$ et son inverse va donc apparaître si l'on développe le dernier produit pourvu que l soit assez grand. Ceci étant vrai pour tout $l\in\mathbb{N}$, on a :

$\prod\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{1-\frac{1}{p_n}}\geqslant\sum\limits_{n=1}^{p_N}\dfrac{1}{n}$. Or on sait que cette dernière série diverge avec N (série de Riemann). En prenant le log du produit partiel on obtient que $\sum\limits_{n=1}^{N}-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ tend vers $+\infty$ avec N or $-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{p_n}$. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs s'applique ici et puisque la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\ln\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$ diverge, il en est alors de même de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{p_n}$.

b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et k un entier inférieur à $\pi(n)$. On note alors $u_n(k)$ le nombre d'entier de $[\![1,n]\!]$ qui ne sont divisibles par aucun des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$.

On a $\pi(n)\leqslant k+u_n(k)$, en effet, dans $\pi(n)$ on peut compter les k premiers nombres premiers puis les autres, dont le nombre est majorer par $u_n(k)$ puisque ces nombres premiers ne sont divisibles par aucun des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$. Soit, en divisant par n, on obtient :

$$\frac{\pi(n)}{n}\leqslant\frac{k}{n}+\frac{u_n(k)}{n}$$

Reste à majorer $u_n(k)$. Pour cela on utilise une division euclidienne. Soit $l\in[\![1,n]\!]$, on pose $N=p_1\cdot\cdots\cdot p_k$. Il existe des entiers naturels uniques q et r tels que $l=qN+r$ avec $0\leqslant r<N$. On va majorer $u_n(k)$ en majorant le nombre d'entier l divisibles par aucun des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$.

Il y a déjà au maximum $[\frac{n}{N}]$ possibilités pour le quotient q. Pour le reste r, on sait que $r>0$ car sinon l est divisible par les p_i. De plus, dire que l n'est divisible par aucun des $(p_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ signifie que l est premier avec N car les p_i sont des nombres premiers distincts. Or le nombre d'entier r de $[\![1,N-1]\!]$ premiers avec N est par définition $\varphi(N)$ (indicatrice d'Euler). On a donc :

$$u_n(k)\leqslant\left[\frac{n}{N}\right]\varphi(N)\leqslant\frac{n}{N}\prod_{i=1}^{k}(p_i-1)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Or ce dernier produit tend vers 0 quand k tend vers l'infini puisque l'on a démontrer en a) que son inverse tens vers l'infini avec k. Finalement :

$$\frac{\pi(n)}{n}\leqslant\frac{k}{n}+\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$$

Il suffit alors de faire tendre k vers l'infini mais pas trop vite, pour que $\frac{k}{n}$ tende vers 0. On peut prendre, par exemple, $k=[\sqrt{n}]$. Le membre de droite tend alors bien vers 0 donc $\frac{\pi(n)}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, autrement dit, $\pi(n)=o(n)$.

José Gregorio : http://agregorio.net

Remarques :

1. Il y a beaucoup de choses écrites dans la démonstration qui peuvent être dites à l'oral, notemment l'explication pour majorer le quotient et le reste dans la division euclidienne. Cela permet de racourcir la démonstration lors de l'oral.

2. Le jury demandera sans doute s'il n'y a pas un résultat célébre et plus précis encore. Il faut absolument être capable de répondre : "Théorème des nombres premiers" : $\pi(n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{\ln(n)}$ démontré indépendamment par Hadamard et de la Vallée Poussin en 1896 à l'aide de méthodes d'analyse complexe.

3. On utilise l'indicatrice d'Euler, il va de soi qu'il faut connaitre la définition de celle-ci et savoir démontrer que $\varphi(p) = p - 1$ et $\varphi(pq) = \varphi(p).\varphi(q)$ si p et q sont des nombres premiers distincts. Ce sont potentiellement des questions du jury.

Thèmes abordés :

* Série à termes positifs divergente
* Nombres premiers
* Indicatrice d'Euler
* Division euclidienne

Bibliographie :

La première partie se trouve plus ou moins partout...

Pour la première et la seconde partie : "Analyse 1 Oraux X-ENS" de Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas chez CASSINI. **Attention**, la seconde partie se trouve seulement dans les éditions augmentées d'après 2008.

José Gregorio : http://agregorio.net