<u>Théorème de Kakutani</u> :

Soit E un e.v.n. de dimension finie sur $\mathbb{R}$, K un convexe compact non vide de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(K) \subset K$. Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}\left(Id_E + u + \cdots + u^{n-1}\right)$ alors $H = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} u_n(K) \neq \emptyset$ et un vecteur x de K est un point fixe de u si et seulement si $x \in H$.

<u>preuve</u> :

a) <u>Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(K)$ est compact et convexe.</u>

En effet, u est continue, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n qui est continue et $u_n(K)$ qui est alors un compact, comme image d'un compact par une application continue. De plus u est linéaire donc u_n est aussi linéaire et pour tout $x, y \in K$ et tout $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda u_n(x) + (1-\lambda)u_n(y) = u_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \in u_n(K)$ puisque K est convexe. Donc $u_n(K)$ est bien convexe.

b) <u>$K_n = u_{n!}(K)$ est une suite décroissante de convexes compacts non vides.</u>

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et n un entier qui divise m. Il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = kn$. Soit $x \in K$, on obtient alors en découpant la somme suivante par paquets de n termes puis en échangeant l'ordre de sommation :

$$u_m(x) = \frac{1}{kn}\sum_{i=0}^{kn-1} u^i(x) = \frac{1}{nk}\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n-1} u^{ln+j}(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} u^j \underbrace{\left(\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^{ln}(x)\right)}_{x'} = u_n(x')$$

Or $u^{ln}(x) \in K$ pour tout $l \in [\![0, k-1]\!]$ et K est convexe donc $x' \in K$ comme combinaison linéaire convexe d'éléments de K et puisque $u_m(x) = u_n(x')$ on a alors montré que si $n|m$ alors $u_m(K) \subset u_n(K)$. Or pour tout entier $n \geqslant 1$, $n!|(n+1)!$ donc en posant $K_n = u_{n!}(K)$, on a montré que $(K_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante pour l'inclusion, d'ensembles convexes, compacts et non vides.

c) <u>Montrons que $H \neq \emptyset$</u>

Pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe $x_n \in K_n \subset K$, or K est un compact, il existe donc une application $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante telle que la suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ converge vers un élément $x \in K$. Supposons que pour un certain entier $n \geqslant 1$, $x \notin K_n$ alors $x \notin K_p$ pour tout $p \geqslant n$, or pour tout $p \geqslant n$, $x_{\varphi(p)} \in K_{\varphi(p)} \subset K_n$ et K_n est compact (donc fermé) donc la limite $x \in K_n$ ce qui est absurde. Donc $x \in K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Autrement dit on a montré que $x \in \bigcap\limits_{n\geqslant 1} K_n = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} u_{n!}(K) \subset \bigcap\limits_{n\geqslant 1} u_n(K) = H \neq \emptyset$.

d) <u>x est un point fixe de u si et seulement si $x \in H$</u>

En effet, si $x \in K$ vérifie $u(x) = x$ alors $u_n(x) = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc $x \in H$.
Réciproquement, si $x \in H$ alors pour tout $n \geqslant 1$, il existe $y_n \in K$ tel que $u_n(y_n) = x$.
De là, on a $u(x) - x = u(u_n(y_n)) - u_n(y_n) = \dfrac{u^n(y_n) - y_n}{n}$, cette dernière égalité venant du fait que $u \circ u_n = u_n + \frac{1}{n}u^n - \frac{Id_E}{n}$.
Or $\dfrac{u^n(y_n) - y_n}{n}$ tend vers 0 puisque les suites $(y_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u^n(y_n))_{n\geqslant 1}$ sont dans K et sont donc bornées.
On a donc bien $u(x) = x$.

José Gregorio : http://agregorio.net

Remarques :

1. Ce théorème n'a plus trop sa place dans la leçon sur les points fixes puisque cette dernière ne semble plus concerner que le théorème du point fixe de Banach.

2. On utilise et redémontre ici le "théorème des compacts emboîtés" qui n'est pas au programme mais qui est assez simple à redémontrer.

3. Le théorème présenté ici est en réalité un cas simple du théorème Kakutani qui généralise le théorème du point fixe de Brower.

Thèmes abordés :

* Endomorphisme
* Convexe
* Compact
* Suite
* Point fixe

Bibliographie :

"Oraux X-ENS, analyse 3" de S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas (CASSINI)

José Gregorio : http://agregorio.net