Théorème de Joachimsthal :

Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x{=}a\cos t \\ y{=}b\sin t \end{array}\right.$, où $a > 0$ et $b > 0$.
Quatre points distincts M_1, M_2, M_3 et M_4 de $\mathcal{E}$ de paramètres respectifs t_1, t_2, t_3 et t_4 sont cocycliques si et seulement si $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

preuve :

a) Supposons les quatre points cocycliques, ce sont alors des points d'intersections de l'ellipse avec un cercle d'équation $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \gamma = 0$. Un tel point de paramètre t vérifie donc

$$a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t + 2\alpha a\cos t + 2\beta b\sin t + \gamma = 0$$

soit encore par les formules d'Euler :

$$a^2\left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 + b^2\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 + 2\alpha a\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} + 2\beta b\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + \gamma = 0$$

soit

$$\frac{a^2}{4}\left(e^{2it}+e^{-2it}+2\right) - \frac{b^2}{4}\left(e^{2it}+e^{-2it}-2\right) + \alpha a(e^{it}+e^{-it}) + \frac{\beta b}{i}(e^{it}-e^{-it}) + \gamma = 0$$

Puis en multipliant par e^{2it}

$$\frac{a^2-b^2}{4}e^{4it} + (\alpha a - i\beta b)e^{i3t} + \left(\frac{a^2+b^2}{2}+\gamma\right)e^{2it} + (\alpha a + i\beta b)e^{it} + \frac{a^2-b^2}{4} = 0$$

Donc les e^{it_k} sont racines du polynôme

$$P(X) = \frac{a^2-b^2}{4}X^4 + (\alpha a - i\beta b)X^3 + \left(\frac{a^2+b^2}{2}+\gamma\right)X^2 + (\alpha a + i\beta b)X + \frac{a^2-b^2}{4}$$

pour $k = 1, 2, 3, 4$. Or d'après les relations entre coefficients et racines d'un polynôme, le produit des racines de P vaut $(-1)^4\frac{a^2-b^2}{4}/\frac{a^2-b^2}{4} = 1$, donc $e^{i(t_1+t_2+t_3+t_4)} = 1$, autrement dit $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}$.

b) Réciproquement, supposons que $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \in 2\pi\mathbb{Z}$, et que M_1, M_2, M_3 et M_4 soient quatre points distincts de $\mathcal{E}$. Soit alors $\mathcal{C}$ un cercle passant par M_1, M_2 et M_3. Il coupe $\mathcal{E}$ en un quatrième point M_4' de paramètre t_4' (éventuellement confondu avec l'un des trois premiers points, c'est le cas où l'ellipse et le cercle sont tangents en un point, on a alors une racine double). D'après a), on a alors $t_1+t_2+t_3+t_4' \in 2\pi\mathbb{Z}$ et donc par soustraction $t_4 \equiv t_4' \pmod{2\pi}$. Ce qui signifie que $M_4 = M_4'$ et les quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont donc bien cocycliques.

Remarques :

1. Il faut bien connaitre les relations entre coefficients et racines d'un polynôme et savoir quand on peut utiliser ces relations pour ne pas s'exposer à des questions dont on ne connait pas les réponses.

2. Une question importante est de savoir si l'équivalence démontrée ici est aussi valable lorsque les points ne sont pas supposés distincts. La réponse est négative si l'on ne se donne pas d'hypothèses supplémentaires. En effet on peut très bien avoir un cercle sécant avec l'ellipse en quatre points distincts et choisir le même de ces quatre points pour M_1, M_2, M_3 et M_4. Les racines $\left(e^{it_k}\right)_{1\leqslant k\leqslant 4}$ sont alors toutes les mêmes ; elles sont toutes égales à e^{it_1} qui n'est pourtant pas une racine multiple. Les relations entre coefficients et racines ne s'appliquent alors pas avec les $\left(e^{it_k}\right)_{1\leqslant k\leqslant 4}$.

Thèmes abordés :

* Polynômes
* Relations coefficients - racines
* Courbes paramétrées
* Coniques

Bibliographie :

"Oraux X-ENS, analyse 3" de S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas (CASSINI)