Propriétés : (Jauges - $E = \mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$)

Si $(E, \|.\|)$ est un $\mathbb{R}$-e.v.n. et $C \subset E$ est convexe, compact, symétrique par rapport à 0 et d'intérieur non vide alors en posant pour tout $x \in E$, $I_x = \{\lambda > 0; x \in \lambda C\}$ $J_C(x) = \inf I_x$, J_C est une norme sur E.

preuve :

1) $0 \in \overset{\circ}{C}$

$\overset{\circ}{C} \neq \emptyset$, il existe donc $x \in C$ et $r > 0$ tels que $B(x, r) \subset C$. Par symétrie de C, $B(-x, r) \subset C$ et par convexité de C, on a $B(0, r) \subset C$ donc $0 \in \overset{\circ}{C}$.

2) $(\forall x \in E),\ I_x \neq \emptyset$

Si $x = 0$ alors $I_x = \mathbb{R}_+^*$ car $0 \in C$. Sinon, d'après 1), $\frac{r}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(0, r) \subset C$ donc $x \in \frac{2\|x\|}{r}C$ et $\frac{2\|x\|}{r} \in I_x \neq \emptyset$.

3) Si $x \neq 0$ alors I_x est de la forme $[\lambda; +\infty[$ avec $\lambda = J_C(x)$

Si $x \in \lambda C$ alors il existe $y \in C$ tel que $x = \lambda y$. Soit $\lambda' > \lambda$, puisque C est convexe et $(0, y) \in C^2$ on a $\frac{\lambda}{\lambda'}y + (1 - \frac{\lambda}{\lambda'})0 = \frac{\lambda}{\lambda'}y \in C$ donc $\lambda y \in \lambda' C$ soit $x \in \lambda' C$. En conclusion, si $\lambda \in I_x$ alors $\lambda' \in I_x$. I_x est donc un intervalle non borné de $\mathbb{R}^+$.
Supposons $J_C(x) = \lambda$ alors par définition de l'inf, on a :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists y_n \in C) \quad x = \left(\lambda + \frac{1}{n}\right) y_n$$

C étant un compact, on peut trouver une sous-suite $(y_{n_k})_{k \geqslant 1}$ de $(y_n)_{n \geqslant 1}$ qui converge vers un élément $y \in C$, on obtient alors $\lambda y_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda y$ et $\frac{1}{n_k}y_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (*puisque la suite est bornée car convergente*). La suite $\left(\left(\lambda + \frac{1}{n_k}\right) y_{n_k}\right)_{k \geqslant 1}$ converge donc vers λy or elle est constante égale à x donc $x = \lambda y$ et $I_x = [\lambda; +\infty[$.

4) J_C est une norme sur E

• Si $J_C(x) = 0$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, $x \in \varepsilon C$. Or C est compact donc borné, il existe alors une constante $M > 0$ telle que $\|x\| \leqslant \varepsilon M$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$ on en déduit que $x = 0$.

• Soient $x \neq 0$ dans E et $\lambda > 0$ on sait d'après 3) qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $I_{\lambda x} = [\alpha; +\infty[$. Donc $\lambda x \in \alpha C$ ou encore $x \in \frac{\alpha}{\lambda}C$. Or α est par définition le plus petit réel strictement positif vérifiant cet appartenance donc $I_x = [\frac{\alpha}{\lambda}; +\infty[$ d'où $J_C(\lambda x) = \alpha = \lambda J_C(x)$.
D'autre part, $J_C(-x) = J_C(x)$ par symétrie de C, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $J_C(\lambda x) = |\lambda| J_C(x)$.

• Soient $x, y \in E$ tels que l'un des deux au moins soit différent de 0. On pose $a = J_C(x)$ et $b = J_C(y)$. Il existe alors $x_0, y_0 \in C$ tels que $x = ax_0$ et $y = by_0$ d'où :

$$x + y = (a + b)\left(\frac{ax_0}{a + b} + \frac{by_0}{a + b}\right) \in (a + b)C$$

Donc, par définition de J_C, on a $J_C(x + y) \leqslant a + b = J_C(x) + J_C(y)$ et J_C est bien une norme.

José Gregorio : http://agregorio.net

Remarques :

1. Une bonne chose lors d'une présentation orale serait de faire une figure : un convexe, compact, symétrique, d'intérieur non vide et de préciser que cet ensemble représente la boule unité pour la norme de jauge.

2. Une question qui pourrait peut être être posée par un jury est la suivante : À quelle condition sur C la norme J_C est-elle euclidienne ? Réponse : si et seulement si C est un ellipsoïde.

Thèmes abordés :

* Espace vectoriel normé
* Norme
* Convexe
* Compact

Bibliographie :

On peut trouver ces résultats dans de nombreux ouvrages :

L'excellent "Petit guide de calcul différentiel : À l'usage de la licence et de l'agrégation" de François Rouvière (CASSINI)

"Agrégation interne de mathématiques, tome 3 : Exercices d'oral corrigés et commentés" de Pierre Meunier (PUF)

"Initiation à l'analyse fonctionnelle" de Vazgain Avanissian (PUF)

"Oraux X-ENS, analyse 3" (*exercice : description géométrique des normes*) de S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas (CASSINI)

José Gregorio : http://agregorio.net