Pivot de Gauss et décomposition LU

1) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice inversible G telle que $GA = U$ où U est une matrice triangulaire supérieure.
2) On peut écrire $A = LU$ avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure si et seulement si $\det(A_p) \neq 0$ pour tout entier $p \in [\![1,n]\!]$ où A_p est la matrice obtenue à partir de A en ne gardant que les p premières lignes et les p premières colonnes.

Prérequis et notations :

n désignera un entier au moins égal à 2 (pour 1 c'est évident) et on notera par la suite E_{ij} la matrice élémentaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé sur la $i^{ème}$ et $j^{ème}$ colonne qui est égal à 1.
On supposera aussi connues quelques opérations élémentaires sur les matrices, en particulier on posera pour tout couple d'entiers distincts $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $M_{ij} = E_{ij}+E_{ji}+\sum\limits_{k\neq i,j} E_{kk}$, une matrice de permutation qui a pour effet d'échanger les lignes i et j de toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, lors d'une multiplication à gauche : $M_{ij}A$ (son déterminant vaut -1) et on posera aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout couple d'entiers distincts $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$. C'est une matrice de transvection de déterminant 1 qui multipliée à gauche de A a pour effet d'ajouter à la $i^{ème}$ ligne de A λ-fois la $j^{ème}$ ligne de A.

preuve :

1) Nous allons faire une récurrence. Supposons que l'on puisse, pour tout entier $k \in [\![0,n-1]\!]$, multiplier A par la gauche par des matrices du type M_{ij} et $T_{ij}(\lambda)$ pour obtenir une matrice $A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij}^{(k)} = 0$ dès que $j \leqslant k$ et $i > j$. Pour $k = 0$ il suffit de poser $A^{(0)} = A$.
Supposons $A^{(k)}$ construite, elle est de la forme :

$$A^{(k)} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11}^{(k)} & \times & \dots & \times & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times & C_k \\ 0 & \dots & 0 & a_{kk}^{(k)} & \\ \hline 0 & \dots & & 0 & \\ \vdots & & & \vdots & B_k \\ 0 & \dots & & 0 & \end{array}\right) \quad \text{où } C_k \in \mathcal{M}_{k,n-k}(\mathbb{R}) \text{ et } B_k \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$$

On a $\det(B_k) \neq 0$ car sinon $\det(A^{(k)}) = 0$ et donc $\det(A) = 0$ puisque $A^{(k)}$ s'obtient en multipliant A par des matrices inversibles, or $A \in GL_n(\mathbb{R})$, c'est donc absurde. Il existe donc un coefficient de la première colonne de B_k qui n'est pas nul, autrement dit il existe un entier $p \geqslant k+1$ tel que $a_{p,k+1}^{(k)} \neq 0$.
D'après nos prérequis le $(k+1)^{ème}$ coefficient de la diagonale de la matrice $R = M_{p,k+1}A^{(k)}$ est alors $r_{k+1,k+1} = a_{p,k+1}^{(k)} \neq 0$ (R s'obtient simplement en échangeant la ligne p et la ligne $k+1$ dans $A^{(k)}$).
Ce dernier coefficient non nul va servir de pivot, on va supprimer un à un les coefficients situés sous $r_{k+1,k+1}$ à l'aide de matrices de transvections appropriées. On obtient ainsi :

$$A^{(k+1)} = T_{n,k+1}\left(\frac{-r_{n,k+1}}{r_{k+1,k+1}}\right). \dots .T_{k+2,k+1}\left(\frac{-r_{k+2,k+1}}{r_{k+1,k+1}}\right)\underbrace{M_{p,k+1}A^{(k)}}_{R}$$

et la matrice $A^{(k+1)}$, ainsi définie, vérifie l'hypothèse de récurrence au rang $k+1$, la propriété est donc vraie pour tout $k = 0, 1, \dots, n-1$. En particulier $U = A^{(n-1)}$ est triangulaire supérieure et s'écrit aussi $GA = U$ où G est le produit des matrices de permutations et transvections qui ont permis d'obtenir $A^{(n-1)}$ avec la méthode décrite précédemment.

2) Supposons que l'on puisse écrire $A = LU$ avec U triangulaire supérieure et L triangulaire inférieure.
On a alors avec les notations de l'énoncé $A_p = L_pU_p$ où $L = \left(\begin{array}{c|c} L_p & 0 \\ \hline \times & \times \end{array}\right)$ et $U = \left(\begin{array}{c|c} U_p & \times \\ \hline 0 & \times \end{array}\right)$
de là on déduit que $\det(A_p) = \det(L_p).\det(U_p)$, or $\det(L) \neq 0$ et $\det(U) \neq 0$ (sinon $A \notin GL_n(\mathbb{R})$) donc $\det(L_p) \neq 0$ et $\det(U_p) \neq 0$ et il s'ensuit alors que $\det(A_p) \neq 0$ et ceci est vrai pour tout $p \in [\![1,n]\!]$.

José Gregorio : http://agregorio.net

Réciproquement, supposons que $\det(A_p) \neq 0$ pour tout $p \in [\![1, n]\!]$.
Nous allons en fait montrer que l'on peut se passer de matrices de permutations M_{ij} dans la construction, par récurrence, de la matrice $A^{(n-1)}$ vue dans 1).
En effet, $\det(A_1) = a_{11} \neq 0$ donc a_{11} peut servir de pivot directement sans avoir à permuter de lignes. On peut donc supprimer tous les coefficients de la première colonne situés sous a_{11} uniquement avec des matrices de transvections du type $T_{i1}(\lambda)$ (avec $2 \leqslant i \leqslant n$) qui sont toutes des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité.
Supposons construite, comme dans 1), la matrice $A^{(p)}$ uniquement grâce à des matrices triangulaires inférieures à diagonale unité, leur produit est aussi une matrice triangulaire inférieure à diagonale unité T.

On a $A^{(p)} = TA$ et $A^{(p)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11}^{(p)} & \times & \dots & \times & & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & & C_k & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times & & & & \\ 0 & \dots & 0 & a_{pp}^{(p)} & & & & \\ \hline 0 & \dots & & 0 & a_{p+1,p+1}^{(p)} & \times & \dots & \times \\ & & & & \times & \times & \dots & \times \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \times & \times & \dots & \times \end{array}\right)$ Pour montrer que l'on peut passer de $A^{(p)}$ à $A^{(p+1)}$ sans matrice de permutation il suffit de montrer que le coefficient $a_{p+1,p+1}^{(p)}$ peut servir de pivot, autrement dit il suffit de montrer que $a_{p+1,p+1}^{(p)} \neq 0$. Pour cela, on peut remarquer que le déterminant obtenu à partir des $(p+1)$ premières lignes et des $(p+1)$ premières colonnes de $A^{(p)}$: $\det(A_{p+1}^{(p)}) = \det(A_p^{(p)}) \times a_{p+1,p+1}^{(p)}$ or comme la matrice T est triangulaire inférieure, on a aussi $A_{p+1}^{(p)} = T_{p+1}A_{p+1}$ et donc $\det(T_{p+1}) \times \det(A_{p+1}) = \det(A_{p+1}^{(p)}) = \det(A_p^{(p)}) \times a_{p+1,p+1}^{(p)}$ et puisque par hypothèse $\det(A_{p+1}) \neq 0$ alors nécessairement $a_{p+1,p+1}^{(p)} \neq 0$, ce qui achève la démonstration. On a en effet comme dans 1), $GA = U$ mais G est cette fois-ci triangulaire inférieure à diagonale unité d'où, en posant $L = G^{-1}$ (qui est aussi triangulaire inférieure à diagonale unité), $A = LU$.

José Gregorio : http://agregorio.net

Remarques :

1. Il faut évidemment connaître les matrices de permutations et de transvections, savoir à quoi elles ressemblent concrètement et être capable de démontrer leurs effets sur les lignes et les colonnes d'une matrice.

2. Culture générale : L comme lower (matrice triangulaire inférieure) et U comme upper (matrice triangulaire supérieure).

3. On peut, pour gagner du temps, passer sous silence un bon nombre d'explications (en particulier les prérequis) et répondre ensuite aux questions du jury.

4. Bien comprendre dans 2) pourquoi $A_{p+1}^{(p)} = T_{p+1}A_{p+1}$.

5. Avec ce développement certaines questions du jury pourraient être : Y a-t-il unicité de la décomposition LU ? Connaissez vous une autre méthode pour démontrer cette décomposition ?

Thèmes abordés :

* Matrices
* Déterminant
* Réduction
* Algorithme matriciel

Bibliographie :

"Oraux X-ENS, algèbre 2" de S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas (CASSINI)

José Gregorio : http://agregorio.net