Propriétés :

a) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}_+^*$. Si f est log-convexe alors f est convexe.

b) f est log-convexe si et seulement si pour tout $c > 0$, $x \mapsto c^x f(x)$ est convexe.

c) Pour $x > 0$, la fonction $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est log-convexe.

preuve :

a) Soient $x, y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$. Puisque $\ln \circ f$ est convexe, on a l'inégalité :

$$\ln\left(f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right)\right) \leqslant \lambda \ln\left(f(x)\right) + (1-\lambda)\ln\left(f(y)\right)$$

Or la fonction ln est concave donc : $\leqslant \ln\left(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\right)$

Puis en prenant l'exponentielle : $f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ et f est donc bien convexe.

b) Supposons $\ln \circ f$ convexe et soit $c > 0$. La fonction $x \mapsto \ln \circ f(x) + x\ln(c)$ est convexe comme somme de deux fonctions convexes (*la seconde étant même linéaire*), autrement dit $x \mapsto \ln\left(c^x f(x)\right)$ est convexe et donc, d'après a), $x \mapsto c^x f(x)$ est convexe.
Réciproquement, supposons que pour tout $c > 0$, $x \mapsto c^x f(x)$ est convexe, on a donc, pour $x, y \in I$ et $\lambda \in [0;1]$:

$$c^{\lambda x+(1-\lambda)y} f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda c^x f(x) + (1-\lambda)c^y f(y)$$

Soit en divisant par $c^{\lambda x+(1-\lambda)y}$:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda c^{(1-\lambda)(x-y)} f(x) + (1-\lambda)c^{\lambda(y-x)} f(y)$$

L'inégalité étant vraie pour tout $c > 0$, on va choisir de minimiser celle-ci avec $c = \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$, on obtient :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{1-\lambda} f(x) + (1-\lambda)\left(\frac{f(x)}{f(y)}\right)^{\lambda} f(y)$$

Soit en simplifiant :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}$$

Ce qui revient à dire, en prenant le log, que $\ln \circ f$ est convexe.

c) Soient $c > 0$ et $t > 0$ fixé, $x \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est log-convexe (*facile, le log est affine en x*) donc, d'après b), $x \mapsto e^{-t}t^{x-1}c^x = g(x,t)$ est convexe. On a alors pour tout $x, y > 0$ et tout $\lambda \in [0;1]$:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y, t) \leqslant \lambda g(x,t) + (1-\lambda)g(y,t)$$

Ce qui revient encore à dire en intégrant par rapport à t entre 0 et $+\infty$ que $x \mapsto c^x\,\Gamma(x)$ est convexe et donc, encore d'après b), que $\Gamma(x)$ est log-convexe.

José Gregorio : http://agregorio.net

Remarques :

1. Il y a d'autres manières de montrer que la fonction Γ est log-convexe, la plus connue est celle qui consiste à dériver deux fois sous l'intégrale et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que la dérivée seconde de $\ln\circ\Gamma$ est positive. Une autre manière consiste à appliquer directement l'inégalité de Hölder avec $\lambda = \frac{1}{p}$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$:

$$\Gamma\left(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}\right) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-\frac{t}{p}}t^{\frac{x-1}{p}}\right)\left(e^{-\frac{t}{p}}t^{\frac{y-1}{p}}\right)dt \leqslant \Gamma(x)^{\frac{1}{p}}\Gamma(y)^{\frac{1}{q}}$$

   Ce qui revient à dire que Γ est log-convexe.

2. Le choix de la valeur de la constante $c = \left(\frac{f(y)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{x-y}}$ dans b) ne tombe pas du ciel, on cherche à minimiser le membre de droite dans l'inégalité via une étude de fonction (*cf. bibliographie*)

Thèmes abordés :

* Convexité
* Intégrale à paramètre
* Intégrale généralisée

Bibliographie :

Le a) se trouve partout et est très simple.

Pour le b), voir "Les maths en tête, Analyse" de Xavier Gourdon (ELLIPSES).

Le c) est assez simple une fois que l'on a fait le b), l'idée est inspirée de "Initiation à l'analyse fonctionnelle" de Vazgain Avanissian (PUF)

José Gregorio : http://agregorio.net